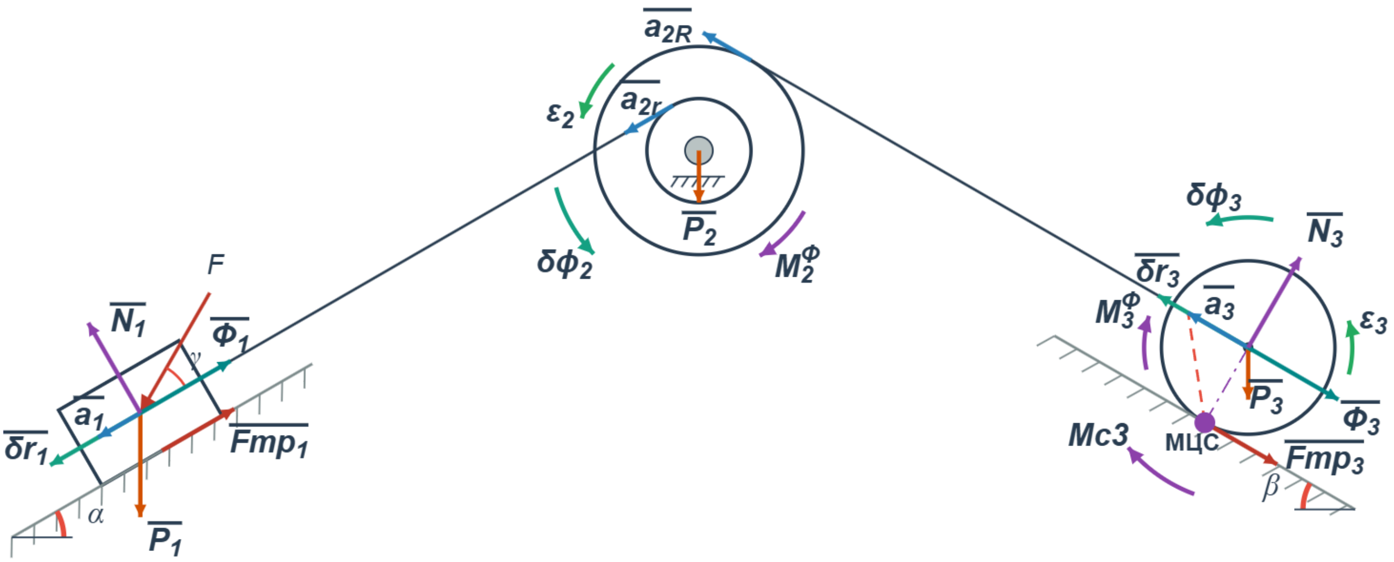
Общее уравнение динамики

Решение:

Изображаем расчетную схему, на которой показываем кинематическую связь между телами и все действующие силы в механической системе.



Пользуясь расчетной схемой запишем кинематические соотношения, выразив ускорения всех тел через a_1.

$$a_{2r} = a_1; \quad \varepsilon_2 = \frac{a_1}{r_2}; \quad a_{2R} = \frac{a_1 \cdot R_2}{r_2}; \quad a_3 = \frac{a_1 \cdot R_2}{r_2}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_1 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3}$$

Определим факторы инерции для каждого тела:

$$\Phi_1 = m_1 a_1$$

$$I_2 = m_2 \rho_2^2; \quad M_2^\Phi = I_2 \varepsilon_2$$

$$M_2^\Phi = \frac{m_2 \cdot \rho_2^2 \cdot a_1}{r_2}$$

$$I_3 = \frac{1}{2} m_3 R_3^2; \quad \Phi_3 = m_3 a_3; \quad M_3^\Phi = I_3 \varepsilon_3$$

$$\Phi_3 = \frac{m_3 \cdot a_1 \cdot R_2}{r_2}; M_3^\Phi = \frac{m_3 \cdot R_3 \cdot a_1 \cdot R_2}{2 \cdot r_2}$$

При стационарных (склерономных) связях возможные перемещения совпадают с действительными.
Выразим возможные перемещения всех тел через δr_1.

$$\delta\phi_2 = \frac{\delta r_1}{r_2}; \quad \delta r_3 = \frac{\delta r_1 \cdot R_2}{r_2}; \quad \delta\phi_3 = \frac{\delta r_1 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3}$$

Запишем общее уравнение динамики в форме принципа возможных перемещений (принцип Д'Аламбера):

$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^i = 0$

Где δA_k^a и δA_k^i - элементарные работы активных сил и сил инерции.

При стационарных (склерономных) связях возможные перемещения совпадают с действительными.
Выразим возможные перемещения всех тел через δr_1.

$$\delta\phi_2 = \frac{\delta r_1}{r_2}; \quad \delta r_3 = \frac{\delta r_1 \cdot R_2}{r_2}; \quad \delta\phi_3 = \frac{\delta r_1 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3}$$

1. Определение элементарной работы активных сил δA_a и обобщенной силы Q_a:

Сумма элементарных работ всех активных сил равна:

$$\delta A_a = P_1 \cdot \sin(\alpha) \cdot \delta r_1 - Fmp_1 \cdot \delta r_1 + F \cdot \cos(\gamma) \cdot \delta r_1 - Mc3 \cdot \delta\phi_3 - P_3 \cdot \sin(\beta) \cdot \delta r_3$$

Приводя к обобщенной координате и вынося за скобки δr_1, получаем обобщенную силу Q_a:

$$\delta A_a = Q_a \cdot \delta r_1 = \left(m_1 g \cdot \sin(\alpha) - Fmp_1 + F \cdot \cos(\gamma) - \frac{Mc3 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3} - \frac{m_3 g \cdot R_2 \cdot \sin(\beta)}{r_2} \right) \cdot \delta r_1$$

2. Определение элементарной работы сил инерции δA_i и обобщенной силы Q_i:

Сумма элементарных работ всех сил инерции равна:

$$\delta A_i = -\Phi_1 \cdot \delta r_1 - M_2^\Phi \cdot \delta\phi_2 - M_3^\Phi \cdot \delta\phi_3 - \Phi_3 \cdot \delta r_3$$

Подставив полученные ранее выражения для факторов инерции и возможные перемещения, получаем:

$$\delta A_i = -(m_1 \cdot a_1) \cdot \delta r_1 - \left(\frac{m_2 \cdot \rho_2^2 \cdot a_1}{r_2} \right) \cdot \left(\frac{1}{r_2} \cdot \delta r_1 \right) - \left(\frac{m_3 \cdot R_3 \cdot a_1 \cdot R_2}{2 \cdot r_2} \right) \cdot \left(\frac{R_2}{r_2 \cdot R_3} \cdot \delta r_1 \right) - \left(\frac{m_3 \cdot a_1 \cdot R_2}{r_2} \right) \cdot \left(\frac{R_2}{r_2} \cdot \delta r_1 \right)$$

Коэффициент при обобщенном ускорении a_1 в Q_i после упрощения (приведенная масса/момент инерции) равен:

$$\delta A_i = Q_i \cdot \delta r_1 = -\left(m_1 + \frac{m_2 \cdot \rho_2^2}{r_2^2} + \frac{\frac{3}{2} \cdot m_3 \cdot R_2^2}{r_2^2} \right) a_1 \cdot \delta r_1$$

3. Итоговое уравнение и результат:

Подставляя выражения для работ в общее уравнение динамики, получаем:

$$\left[\left(m_1 g \cdot \sin(\alpha) - Fmp_1 + F \cdot \cos(\gamma) - \frac{Mc3 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3} - \frac{m_3 g \cdot R_2 \cdot \sin(\beta)}{r_2} \right) - \left(m_1 + \frac{m_2 \cdot \rho_2^2}{r_2^2} + \frac{\frac{3}{2} \cdot m_3 \cdot R_2^2}{r_2^2} \right) a_1 \right] \cdot \delta r_1 = 0$$

При $\delta r_1 \neq 0$, получаем:

$$\left(m_1 g \cdot \sin(\alpha) - Fmp_1 + F \cdot \cos(\gamma) - \frac{Mc3 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3} - \frac{m_3 g \cdot R_2 \cdot \sin(\beta)}{r_2} \right) - \left(m_1 + \frac{m_2 \cdot \rho_2^2}{r_2^2} + \frac{\frac{3}{2} \cdot m_3 \cdot R_2^2}{r_2^2} \right) a_1 = 0$$

Решая это уравнение относительно искомого ускорения a_1, находим:

$$a_1 = \frac{m_1 g \cdot \sin(\alpha) - Fmp_1 + F \cdot \cos(\gamma) - \frac{Mc3 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3} - \frac{m_3 g \cdot R_2 \cdot \sin(\beta)}{r_2}}{m_1 + \frac{m_2 \cdot \rho_2^2}{r_2^2} + \frac{\frac{3}{2} \cdot m_3 \cdot R_2^2}{r_2^2}}$$

Определим момент сопротивления качению.

$M_{c3} = kN_3; \quad N_3 = P_3 \cdot \cos(\beta);$

$M_{c3} = k\left(m_3 g \cdot \cos(\beta)\right).$

Определим силу трения скольжения.

$Fmp_1 = N_1 f_1; \quad N_1 = P_1 \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\gamma);$

$Fmp_1 = \left(m_1 g \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\gamma)\right) f_1.$

Подставив найденные силы, окончательно получаем:

$$a_1 = \frac{m_1 g \cdot \sin(\alpha) - \left(\left(m_1 g \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\gamma)\right) f_1\right) + F \cdot \cos(\gamma) - \dfrac{\left(k\left(m_3 g \cdot \cos(\beta)\right)\right) \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3} - \dfrac{m_3 g \cdot R_2 \cdot \sin(\beta)}{r_2}}{m_1 + \dfrac{m_2 \cdot \rho_2^2}{r_2^2} + \dfrac{\dfrac{3}{2} \cdot m_3 \cdot R_2^2}{r_2^2}}$$