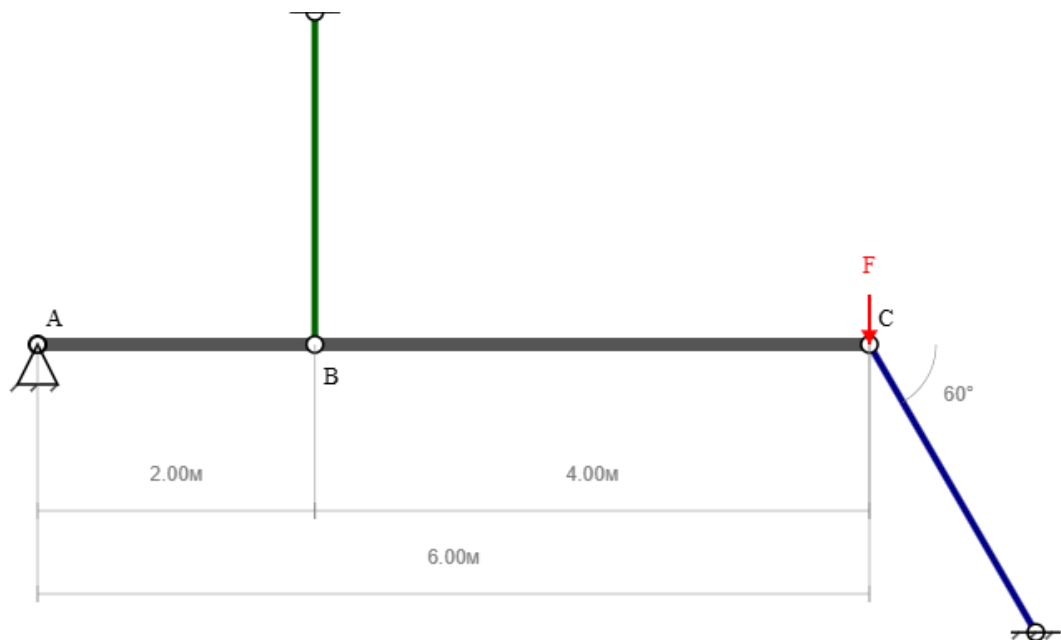


Расчет стержневой системы

1. Схема статически неопределимой стержневой системы

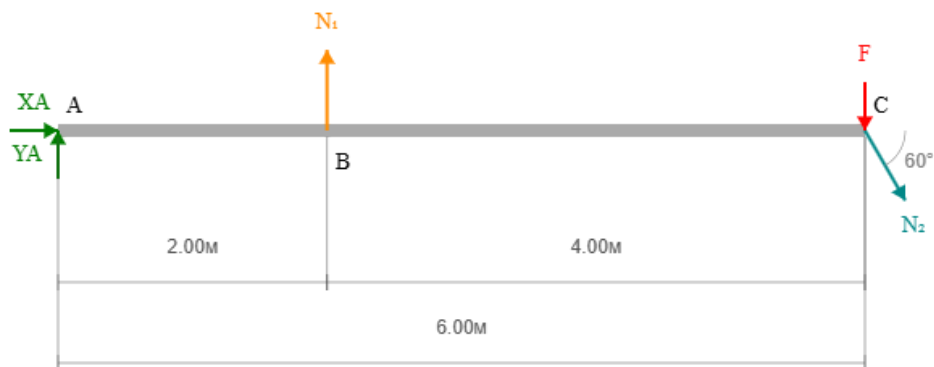


1. Уравнения равновесия

1.1 Исходные данные и известные величины:

- Стержень 1: длина $\ell_1 = 1\text{м}$, площадь $A_1 = 6\text{см}^2$, угол к горизонту $\alpha_1 = 90^\circ$
- Стержень 2: длина $\ell_2 = 1.2\text{м}$, площадь $A_2 = 8\text{см}^2$, угол к горизонту $\alpha_2 = 60^\circ$
- Сосредоточенная сила: $F = 20\text{кН}$

1.2. Расчетная схема (для уравнений равновесия)



Уравнения равновесия (относительно опоры A):

$$\sum M_A = -F \cdot 6 + N_1 \cdot 2 - N_2 \cdot \sin(60^\circ) \cdot 6 = 0$$

$$\sum F_y = Y_A - F + N_1 - N_2 \cdot \sin(60^\circ) = 0$$

$$\sum F_x = X_A + N_2 \cdot \cos(60^\circ) = 0$$

Числовые уравнения равновесия:

$$2 \cdot N_1 - 5.2 \cdot N_2 = 120 \quad (1)$$

$$Y_A + N_1 - 0.87 \cdot N_2 = 20 \quad (2)$$

$$X_A + 0.5 \cdot N_2 = 0 \quad (3)$$

2. Раскрытие статической неопределимости

В системе возникает 4 неизвестных усилия: две составляющие реакции X_A , Y_A в шарнирно-неподвижной опоре А и продольное усилие N_1 в стержне 1 и продольное усилие N_2 в стержне 2.

$$n = 4 - 3 = 1$$

т.е. система 1 раз статически неопределима.

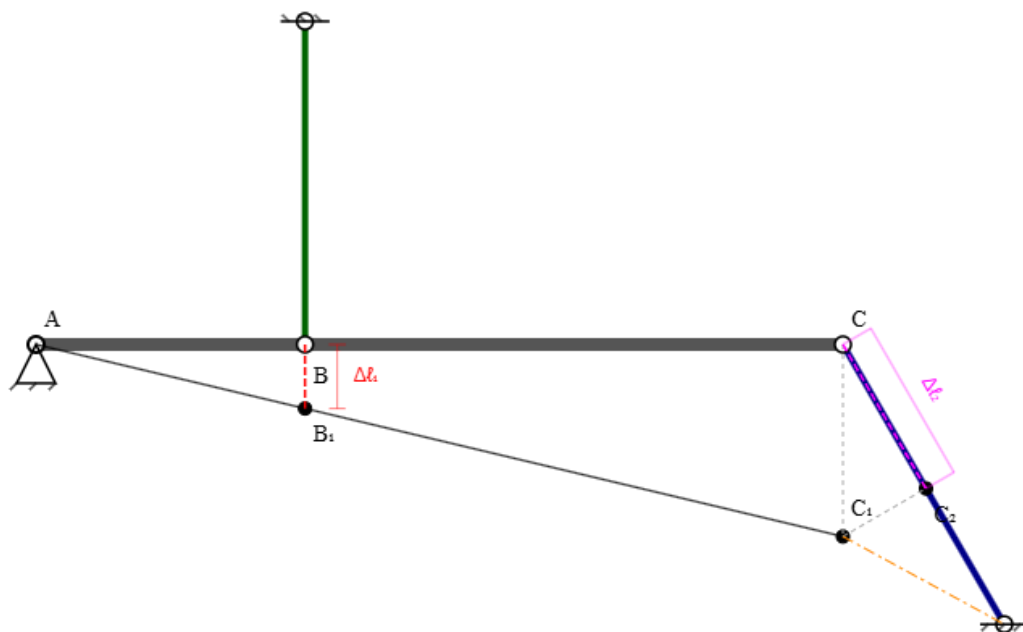
Для определения неизвестных усилий, составленных трех уравнений равновесия недостаточно.

Следовательно, требуется составить дополнительное, четвертое, выражение — уравнение совместности деформаций.

Для составления уравнения совместности деформаций рассмотрим схему перемещений системы ("Схема деформаций"). Под действием силы F балка АС повернется относительно шарнира А на некоторый малый угол θ .

Для малых углов поворота балки, перемещения ее точек можно считать перпендикулярными исходному положению балки.

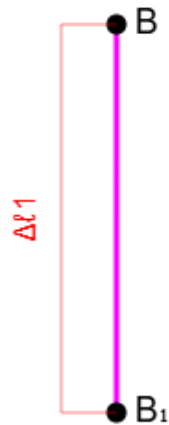
2.1. Схема деформаций



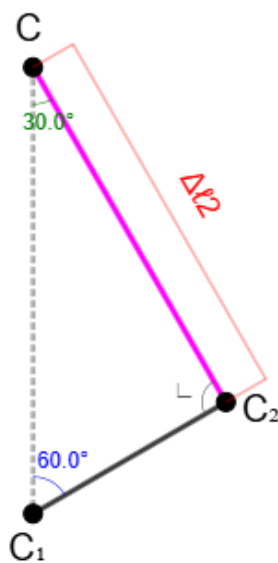
В результате деформации системы, точка B (крепления стержня 1) перемещается в положение B_1 . Аналогично, точка C (крепления стержня 2) перемещается в положение C_1 .

При этом изменится длина стержней: стержень 1 деформируется на величину Δl_1 , стержень 2 деформируется на Δl_2 .

2.2 Детализация деформации Δl_1

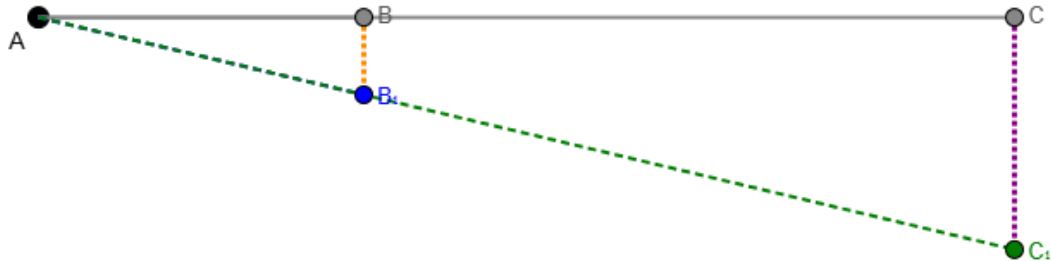


2.3 Детализация деформации Δl_2



Из подобия треугольников, образованных поворотом балки вокруг опоры А (см. Кинематическая схема поворота балки), запишем соотношение для абсолютных величин вертикальных (или перпендикулярных балке) перемещений точек В и С:

2.4 Кинематическая схема поворота балки



$$\frac{BB_1}{2} = \frac{CC_1}{6} \quad (4)$$

Так как стержень 1 вертикальный (угол $\alpha_1 = 90^\circ$), то его абсолютное изменение длины $|\Delta \ell_1|$ равно абсолютному вертикальному перемещению точки его крепления:

$$BB_1 = |\Delta \ell_1|$$

Для наклонного стержня 2, его абсолютное изменение длины $|\Delta \ell_2|$ связано с абсолютным вертикальным перемещением CC_1 через угол наклона $\alpha_2 = 60^\circ$ (см. рис. 4):

$$|\Delta \ell_2| = CC_1 \cdot |\sin(60^\circ)|$$

Откуда:

$$CC_1 = \frac{|\Delta \ell_2|}{|\sin(60^\circ)|}$$

Выразим деформации $\Delta \ell_1$ и $\Delta \ell_2$ через усилия по закону ГукаЮ. При этом обязательно учитываем характер деформаций (укорочение записываем со знаком «-», удлинение со знаком «+»):

$$\Delta \ell_1 = \frac{N_1 \ell_1}{E_1 A_1} \quad ; \quad \Delta \ell_2 = \frac{N_2 \ell_2}{E_2 A_2}$$

Тогда уравнение совместности деформаций будет::

$$\frac{N_1 \ell_1}{E_1 \cdot A_1 \cdot 2} = - \frac{N_2 \ell_2}{E_2 \cdot A_2 \cdot 6 \cdot |\sin(60^\circ)|} \quad (5)$$

Сокращаем на базовый модуль упругости E (при этом остаются коэффициенты для E_1 и E_2), подставляем числовые значения и выражаем N_1 через N_2 :

Где модули упругости стержней выражаются через базовый модуль упругости E с учетом заданных коэффициентов:

$$E_1 = E \quad ; \quad E_2 = E$$

$$N_1 \cdot \frac{1}{1 \cdot 0.0006 \cdot 2} = -N_2 \cdot \frac{1.2}{1 \cdot 0.0008 \cdot 6 \cdot 0.866}$$

$$N_1 = -0.3464 \cdot N_2 \quad (6)$$

Для определения неизвестных усилий подставим полученное соотношение (6) в уравнение моментов (1).

Шаг 1: Определение усилия N_2

Подставим выражение для N_1 из соотношения (6), т.е. $N_1 = -0.3464 \cdot N_2$, в уравнение моментов (1):

$$\text{Исходное уравнение моментов (1): } 2 \cdot N_1 - 5.2 \cdot N_2 = 120$$

$$2 \cdot (-0.3464 \cdot N_2) - 5.2 \cdot N_2 = 120$$

$$N_2 \cdot (-5.889) = 120$$

$$N_2 = \frac{120}{-5.889} = -20.38 \text{ кН}$$

Шаг 2: Определение усилия N_1

Подставляем найденное значение $N_2 = -20.38 \text{ кН}$ в соотношение (6):

$$N_1 = -0.3464 \cdot N_2 = -0.3464 \cdot (-20.38) = 7.06 \text{ кН}$$

Шаг 4: Определение реакции Y_A

Подставляем найденные значения N_1 и N_2 в уравнение проекций сил на ось Y (уравнение равновесия (2)):

$$\text{Исходное уравнение (2): } 1 \cdot N_1 - 0.87 \cdot N_2 + 1 \cdot Y_A = 20$$

$$1 \cdot (7.06) - 0.87 \cdot (-20.38) + 1 \cdot Y_A = 20$$

$$1 \cdot Y_A = 20 - 24.71$$

$$1 \cdot Y_A = -4.71$$

$$Y_A = \frac{-4.71}{1} = -4.71 \text{ кН}$$

Шаг 3: Определение реакции X_A

Подставляем найденные значения N_1 и N_2 в уравнение проекций сил на ось X (уравнение равновесия (3)):

Исходное уравнение (3): $0.5 \cdot N_2 + 1 \cdot X_A = 0$

$$0.5 \cdot (-20.38) + 1 \cdot X_A = 0$$

$$1 \cdot X_A = 0 + 10.19$$

$$1 \cdot X_A = 10.19$$

$$X_A = \frac{10.19}{1} = 10.19 \text{ кН}$$

Ответы:

$$N_1 = 7.06 \text{ кН} \quad (\text{растянут})$$

$$N_2 = -20.38 \text{ кН} \quad (\text{сжат})$$

$$X_A = 10.19 \text{ кН}$$

$$Y_A = -4.71 \text{ кН}$$

3. Расчет на прочность

Расчет стержневой системы на прочность

Допускаемое напряжение для материала стержней:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа}$$

Из условия прочности определяем расчетные площади сечения. $\sigma = \frac{|N|}{A} \leq [\sigma] \Rightarrow A \geq \frac{|N|}{[\sigma]}$

Задано соотношение площадей: $A_1 = 0,75A_2$. Требуемые площади из условия прочности:

$$A_1^p = 0,75A_2^p \geq \frac{|N_1|}{[\sigma]} = \frac{7,06 \cdot 10^3 \text{ Н}}{160 \text{ МПа}} = 44,1 \text{ мм}^2$$

$$A_2^p \geq \frac{|N_2|}{[\sigma]} = \frac{20,38 \cdot 10^3 \text{ Н}}{160 \text{ МПа}} = 127,4 \text{ мм}^2$$

Условие для стержня 2 является определяющим. Принимаем:

$$A_2 = 127,4 \text{ мм}^2$$

$$A_1 = 0,75A_2 = 0,75 \cdot 127,4 = 95,5 \text{ мм}^2$$

Расчетные диаметры (для круглого сечения):

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4A_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 95,5}{\pi}} = 11 \text{ мм}$$

$$d_2 \geq \sqrt{\frac{4A_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 127,4}{\pi}} = 12,7 \text{ мм}$$

Проверка на прочность (с использованием расчетных площадей):

$$\sigma_1 = \frac{|N_1|}{A_1} = \frac{7,06 \cdot 10^3 \text{ Н}}{95,5 \text{ мм}^2} = 74 \text{ МПа} < [\sigma]$$

$$\sigma_2 = \frac{|N_2|}{A_2} = \frac{20,38 \cdot 10^3 \text{ Н}}{127,4 \text{ мм}^2} = 160 \text{ МПа} \approx [\sigma]$$