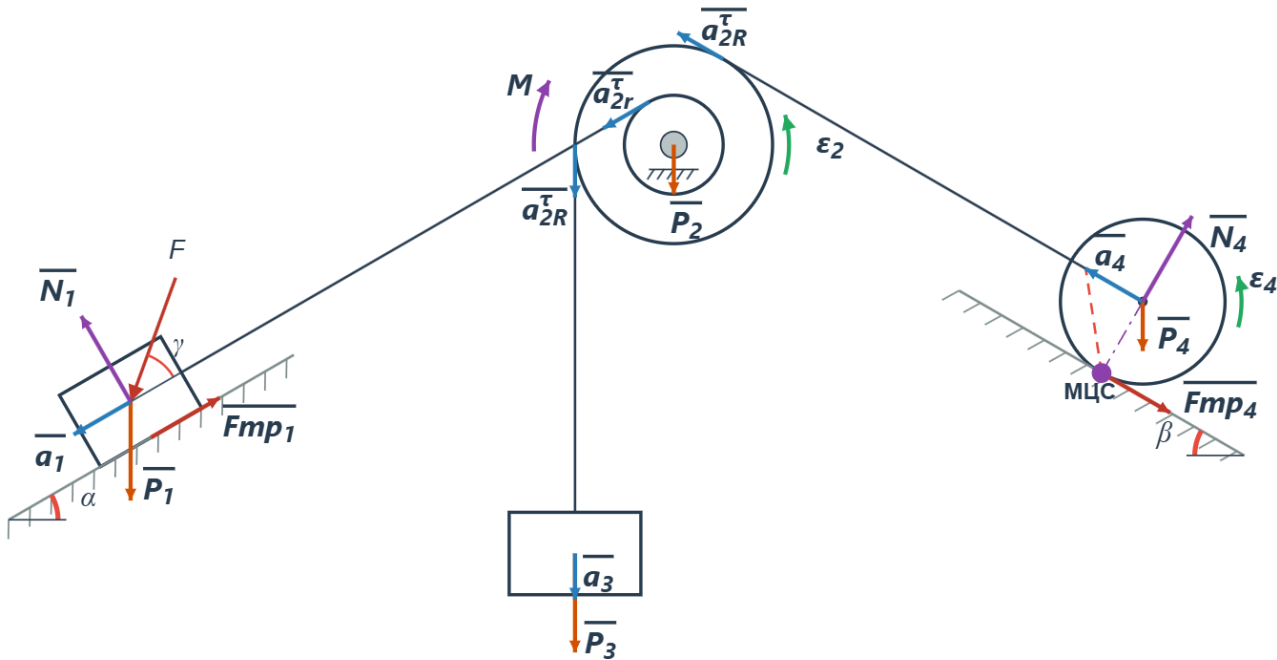


Дифференциальные уравнения движения твердого тела

Решение:

Изображаем расчетную схему, на которой показываем кинематическую связь между телами и все действующие силы в механической системе.



Пользуясь расчетной схемой запишем кинематические соотношения, выразив ускорения всех тел через a_1 .

$$a_{2r}^{\tau} = a_1; \quad \ddot{\phi}_2 = \varepsilon_2 = \frac{a_1}{r_2}; \quad a_{2R}^{\tau} = \frac{a_1 \cdot R_2}{r_2}; \quad a_3^{\tau} = \frac{a_1 \cdot R_2}{r_2}$$

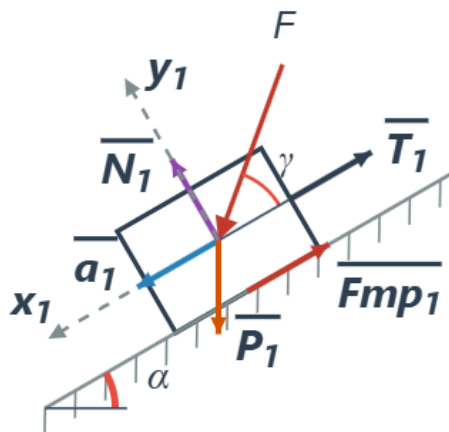
$$a_4^{\tau} = \frac{a_1 \cdot R_2}{r_2}; \quad \ddot{\phi}_4 = \varepsilon_4 = \frac{a_1 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_4}$$

Решение задачи методом дифференциальных уравнений

Тело 1

Тело 1 находится в поступательном движении.

На тело действуют следующие силы: силы тяжести $P_1 = m_1g$; реакции нормального давления N_1 !; силы трения скольжения F_{mp1} !; внешней силы F ; силы натяжения нитей T_1 !.



Для поступательного движения тела 1 применяем теорему о движении центра масс:

$$m_1 \ddot{x}_1 = \sum F_{kx}^e$$

$$0 = \sum F_{ky}^e$$

Спроецируем все силы на оси и получим:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = P_1 \cdot \sin(\alpha) - F_{mp1} + F \cdot \cos(\gamma) - T_1 \\ 0 = -P_1 \cdot \cos(\alpha) + N_1 - F \cdot \sin(\gamma) \end{cases}$$

Найдем нормальную реакцию опоры:

$$N_1 = P_1 \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\gamma)$$

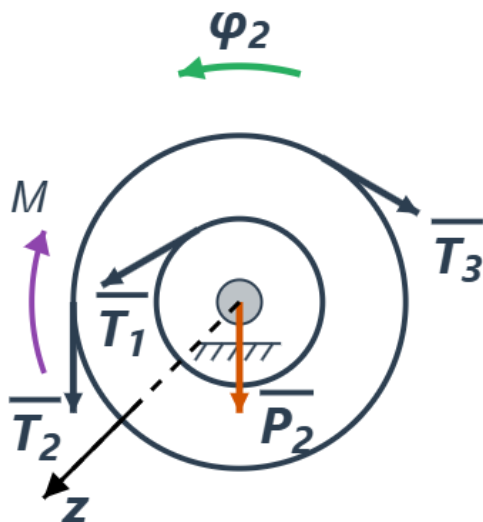
Подставим найденные соотношения в уравнения движения:

$$\begin{cases} m_1 \cdot (a_1) = P_1 \cdot \sin(\alpha) - F_{mp1} + F \cdot \cos(\gamma) - T_1 \\ N_1 = P_1 \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\gamma) \end{cases}$$

Тело 2

Тело 2 вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси.

На тело действуют следующие силы: силы тяжести $P_2 = m_2 g$; пары сил с моментом M ; силы натяжения нитей T_1, T_2, T_3 !.



Для вращательного движения тела 2 применяем теорему об изменении момента количества движения:

$$I_{z2}\ddot{\phi}_2 = \sum M_z(\bar{F}_k^e)$$

Спроецируем все силы на оси и получим:

$$\{I_{z2}\ddot{\phi}_2 = -M + T_1 \cdot r_2 + T_2 \cdot R_2 - T_3 \cdot R_2$$

Момент инерции тела относительно оси вращения:

$$I_{z2} = m_2 \rho_2^2$$

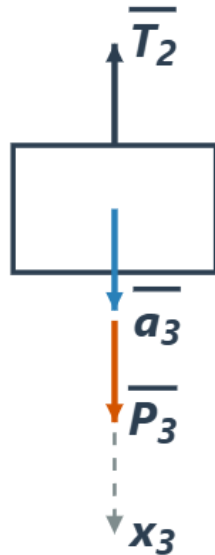
Подставим найденные соотношения в уравнения движения:

$$\left\{ (m_2 \rho_2^2) \left(\frac{a_1}{r_2} \right) = -M + T_1 \cdot r_2 + T_2 \cdot R_2 - T_3 \cdot R_2 \right.$$

Тело 3

Тело 3 находится в поступательном движении.

На тело действуют следующие силы: силы тяжести $P_3 = m_3 g$; силы натяжения нитей T_2 !



Для поступательного движения тела 3 применяем теорему о движении центра масс:

$$m_3 \ddot{x}_3 = \sum F_{kx}^e$$

Спроецируем все силы на оси и получим:

$$\{m_3 \ddot{x}_3 = P_3 - T_2$$

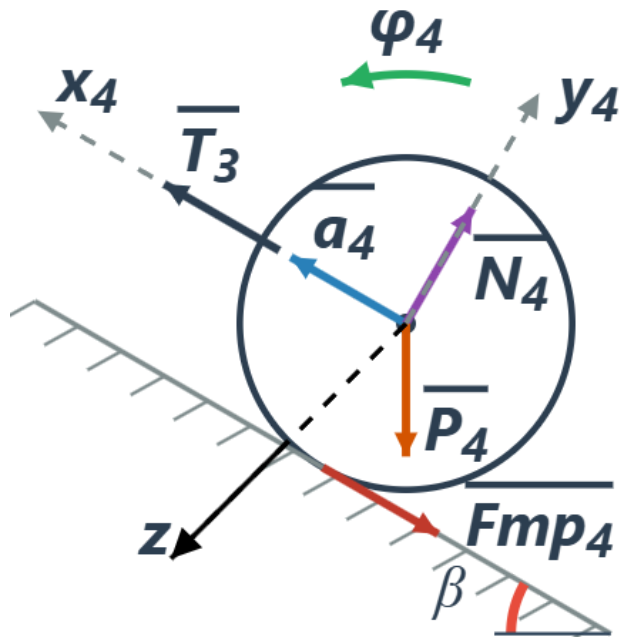
Подставим найденные соотношения в уравнения движения:

$$\left\{ m_3 \cdot \left(\frac{a_1 \cdot R_2}{r_2} \right) = P_3 - T_2 \right.$$

Тело 4

Тело 4 находится в плоском движении.

На тело действуют следующие силы: силы тяжести $P_4 = m_4 g$; реакции нормального давления N_4 !; силы трения скольжения $F_{тр4}$!; силы натяжения нитей T_3 !



Для плоского движения тела 4 запишем дифференциальные уравнения:

$$m_4 \ddot{x}_4 = \sum F_{kx}^e$$

$$0 = \sum F_{ky}^e$$

$$I_{z4} \ddot{\phi}_4 = \sum M_z(\bar{F}_k^e)$$

Спроецируем все силы на оси и получим:

$$\begin{cases} m_4 \ddot{x}_4 = -P_4 \cdot \sin(\beta) - F_{mp4} + T_3 \\ 0 = -P_4 \cdot \cos(\beta) + N_4 \\ I_{z4} \ddot{\phi}_4 = F_{mp4} \cdot R_4 \end{cases}$$

Найдем нормальную реакцию опоры:

$$N_4 = P_4 \cdot \cos(\beta)$$

Момент инерции тела относительно оси вращения:

$$I_{z4} = \frac{1}{2} m_4 R_4^2$$

Подставим найденные соотношения в уравнения движения:

$$\begin{cases} m_4 \cdot \left(\frac{a_1 \cdot R_2}{r_2} \right) = -P_4 \cdot \sin(\beta) - F_{mp4} + T_3 \\ N_4 = P_4 \cdot \cos(\beta) \\ \left(\frac{1}{2} m_4 R_4^2 \right) \left(\frac{a_1 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_4} \right) = F_{mp4} \cdot R_4 \end{cases}$$

Итоговая система уравнений

Собираем полученные уравнения в единую систему:

$$\begin{cases} m_1 \cdot (a_1) = P_1 \cdot \sin(\alpha) - F_{mp1} + F \cdot \cos(\gamma) - T_1 & (1) \\ (m_2 \rho_2^2) \left(\frac{a_1}{r_2} \right) = -M + T_1 \cdot r_2 + T_2 \cdot R_2 - T_3 \cdot R_2 & (2) \\ m_3 \cdot \left(\frac{a_1 \cdot R_2}{r_2} \right) = P_3 - T_2 & (3) \\ m_4 \cdot \left(\frac{a_1 \cdot R_2}{r_2} \right) = -P_4 \cdot \sin(\beta) - F_{mp4} + T_3 & (4) \\ \left(\frac{1}{2} m_4 R_4^2 \right) \left(\frac{a_1 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_4} \right) = F_{mp4} \cdot R_4 & (5) \end{cases}$$

Нахождение искомого ускорения

Для определения искомого ускорения a_1 составим обобщенное уравнение динамики, умножив каждое уравнение системы на соответствующий кинематический коэффициент:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \cdot (a_1) = P_1 \cdot \sin(\alpha) - F_{mp1} + F \cdot \cos(\gamma) - T_1 \quad | \cdot (1) \\ (m_2 \rho_2^2) \left(\frac{a_1}{r_2} \right) = -M + T_1 \cdot r_2 + T_2 \cdot R_2 - T_3 \cdot R_2 \quad | \cdot \left(\frac{1}{r_2} \right) \\ m_3 \cdot \left(\frac{a_1 \cdot R_2}{r_2} \right) = P_3 - T_2 \quad | \cdot \left(\frac{R_2}{r_2} \right) \\ m_4 \cdot \left(\frac{a_1 \cdot R_2}{r_2} \right) = -P_4 \cdot \sin(\beta) - F_{mp4} + T_3 \quad | \cdot \left(\frac{R_2}{r_2} \right) \\ \left(\frac{1}{2} m_4 R_4^2 \right) \left(\frac{a_1 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_4} \right) = F_{mp4} \cdot R_4 \quad | \cdot \left(\frac{R_2}{r_2 \cdot R_4} \right) \end{array} \right.$$

Сложив и алгебраически упростив полученные уравнения (исключив внутренние силы натяжения и сократив общие множители), получим выражение для искомого ускорения:

$$a_1 = \frac{P_1 \cdot \sin(\alpha) - F_{mp1} + F \cdot \cos(\gamma) - \frac{M}{r_2} + \frac{P_3 \cdot R_2}{r_2} - \frac{P_4 \cdot R_2 \cdot \sin(\beta)}{r_2}}{m_1 + \frac{m_2 \cdot \rho_2^2}{r_2^2} + \frac{m_3 \cdot R_2^2}{r_2^2} + \frac{\frac{3}{2} \cdot m_4 \cdot R_2^2}{r_2^2}}$$

Определим силу трения скольжения.

$$F_{mp1} = N_1 f_1; \quad N_1 = P_1 \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\gamma);$$

$$F_{mp1} = (m_1 g \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\gamma)) f_1.$$

Подставив найденные силы, окончательно получаем:

$$a_1 = \frac{m_1 g \cdot \sin(\alpha) - ((m_1 g \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\gamma)) f_1) + F \cdot \cos(\gamma) - \frac{M}{r_2} + \frac{m_3 g \cdot R_2}{r_2} - \frac{m_4 g \cdot R_2 \cdot \sin(\beta)}{r_2}}{m_1 + \frac{m_2 \cdot \rho_2^2}{r_2^2} + \frac{m_3 \cdot R_2^2}{r_2^2} + \frac{\frac{3}{2} \cdot m_4 \cdot R_2^2}{r_2^2}}$$