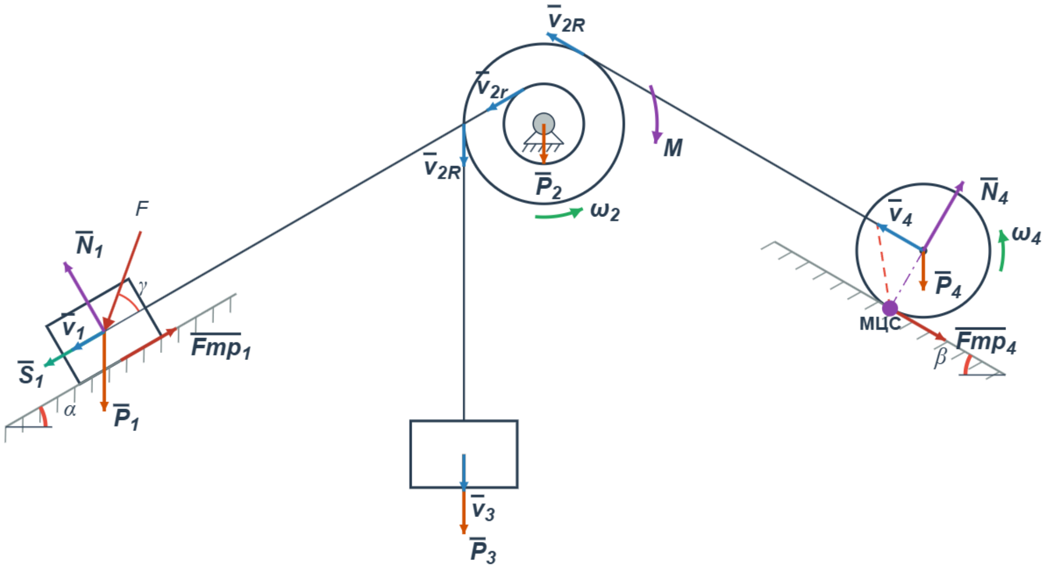
Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Решение:

Изображаем расчетную схему, на которой показываем кинематическую связь между телами и все действующие силы в механической системе.



Пользуясь расчетной схемой запишем кинематические соотношения, выразив скорости всех тел через V_1.

$$V_{2r} = V_1; \quad \omega_2 = \frac{V_1}{r_2}; \quad V_{2R} = \frac{V_1 \cdot R_2}{r_2}; \quad V_3 = \frac{V_1 \cdot R_2}{r_2}$$

$$V_4 = \frac{V_1 \cdot R_2}{r_2}; \quad \omega_4 = \frac{V_1 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_4}$$

Аналогичные соотношения для перемещений (S) и углов поворота (φ) через S_1:

$$S_{2r} = S_1; \quad \varphi_2 = \frac{S_1}{r_2}; \quad S_{2R} = \frac{S_1 \cdot R_2}{r_2}; \quad S_3 = \frac{S_1 \cdot R_2}{r_2}$$

$$S_4 = \frac{S_1 \cdot R_2}{r_2}; \quad \varphi_4 = \frac{S_1 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_4}$$

Пошаговый вывод кинематических соотношений:

$$V_{2r} = V_1$$

$$\omega_2 = \frac{V_{2r}}{r_2} \longrightarrow \omega_2 = \frac{V_1}{r_2}$$

$$V_{2R} = \omega_2 \cdot R_2 \longrightarrow V_{2R} = \frac{V_1 \cdot R_2}{r_2}$$

$$V_3 = V_{2R} \longrightarrow V_3 = \frac{V_1 \cdot R_2}{r_2}$$

$$V_4 = V_{2R} \longrightarrow V_4 = \frac{V_1 \cdot R_2}{r_2}$$

$$\omega_4 = \frac{V_4}{R_4} \longrightarrow \omega_4 = \frac{V_1 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_4}$$

Для определения V_1 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^e$$

Определяем T и T_0. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:
вычисляем кинетическую энергию механической системы через V_1.

$$T = \sum_{k=1}^{4} T_k = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

Тело 1

$T_1 = \dfrac{1}{2} m_1 V_1^2$ - поступательное движение тела

$T_1 = \dfrac{1}{2} m_1 V_1^2 = \dfrac{1}{2} m_1 (V_1)^2$

Тело 2

$T_2 = \dfrac{1}{2} J_{c2} \omega_2^2$ - вращение тела вокруг неподвижной оси

ρ_2 - радиус инерции тела 2

$J_{c2} = m_2 \rho_2^2$ - момент инерции тела 2

$\omega_2 = \dfrac{V_1}{r_2}$ - угловая скорость тела 2

$T_2 = \dfrac{1}{2} \left(m_2 \rho_2^2\right) \left(\dfrac{V_1}{r_2}\right)^2$

Тело 3

$T_3 = \dfrac{1}{2} m_3 V_3^2$ - поступательное движение тела

$V_3 = \dfrac{V_1 \cdot R_2}{r_2}$ - скорость тела 3

$T_3 = \dfrac{1}{2} m_3 V_3^2 = \dfrac{1}{2} m_3 \left(\dfrac{V_1 \cdot R_2}{r_2}\right)^2$

Тело 4

$T_4 = \dfrac{1}{2} m_4 V_4^2 + \dfrac{1}{2} J_{c4} \omega_4^2$ - плоское движение тела

$V_4 = \dfrac{V_1 \cdot R_2}{r_2}$ - скорость центра масс тела 4

$J_{c4} = \dfrac{1}{2} m_4 R_4^2$ - момент инерции тела 4

$\omega_4 = \dfrac{V_1 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_4}$ - угловая скорость тела 4

$T_4 = \dfrac{1}{2} m_4 \left(\dfrac{V_1 \cdot R_2}{r_2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} m_4 R_4^2\right)\left(\dfrac{V_1 \cdot R_2}{r_2 \cdot R_4}\right)^2$

Окончательно получаем

$$T = \frac{1}{2} V_1^2 \left(m_1 + \frac{\rho_2^2 \cdot m_2}{r_2^2} + \frac{R_2^2 \cdot m_3}{r_2^2} + \frac{\frac{3}{2} \cdot R_2^2 \cdot m_4}{r_2^2} \right)$$

Вычисляем работу всех внешних сил:

$$\sum A_k = -M \cdot \varphi_2 + P_1 \cdot \cos(60^\circ) \cdot s_1 - Fmp_1 \cdot s_1 + F \cdot \cos(\gamma) \cdot s_1 + P_3 \cdot s_3 - P_4 \cdot \cos(60^\circ) \cdot s_4$$

$$\sum A_k = s_1 \left(-M \cdot \frac{1}{r_2} + m_1 g \cdot \cos(60^\circ) - Fmp_1 + F \cdot \cos(\gamma) + m_3 g \cdot \frac{R_2}{r_2} - m_4 g \cdot \cos(60^\circ) \cdot \frac{R_2}{r_2} \right)$$

Тогда, приравнивая T и ΣA, получаем предварительное выражение:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2\left(s_1\left(-M \cdot \frac{1}{r_2} + m_1 g \cdot \cos(60^\circ) - Fmp_1 + F \cdot \cos(\gamma) + m_3 g \cdot \frac{R_2}{r_2} - m_4 g \cdot \cos(60^\circ) \cdot \frac{R_2}{r_2}\right)\right)}{m_1 + \dfrac{\rho_2^2 \cdot m_2}{r_2^2} + \dfrac{R_2^2 \cdot m_3}{r_2^2} + \dfrac{\dfrac{3}{2} \cdot R_2^2 \cdot m_4}{r_2^2}}}$$

Определим силу трения скольжения.

$Fmp_1 = N_1 f_1; \quad N_1 = P_1 \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\gamma);$

$Fmp_1 = (m_1 g \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\gamma)) f_1.$

Полученные величины подставим в уравнение теоремы об изменении кинетической энергии, окончательно получаем:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2\left(s_1\left(-M \cdot \frac{1}{r_2} + m_1 g \cdot \cos(60^\circ) - ((m_1 g \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\gamma)) f_1) + F \cdot \cos(\gamma) + m_3 g \cdot \frac{R_2}{r_2} - m_4 g \cdot \cos(60^\circ) \cdot \frac{R_2}{r_2}\right)\right)}{m_1 + \dfrac{\rho_2^2 \cdot m_2}{r_2^2} + \dfrac{R_2^2 \cdot m_3}{r_2^2} + \dfrac{\dfrac{3}{2} \cdot R_2^2 \cdot m_4}{r_2^2}}}$$