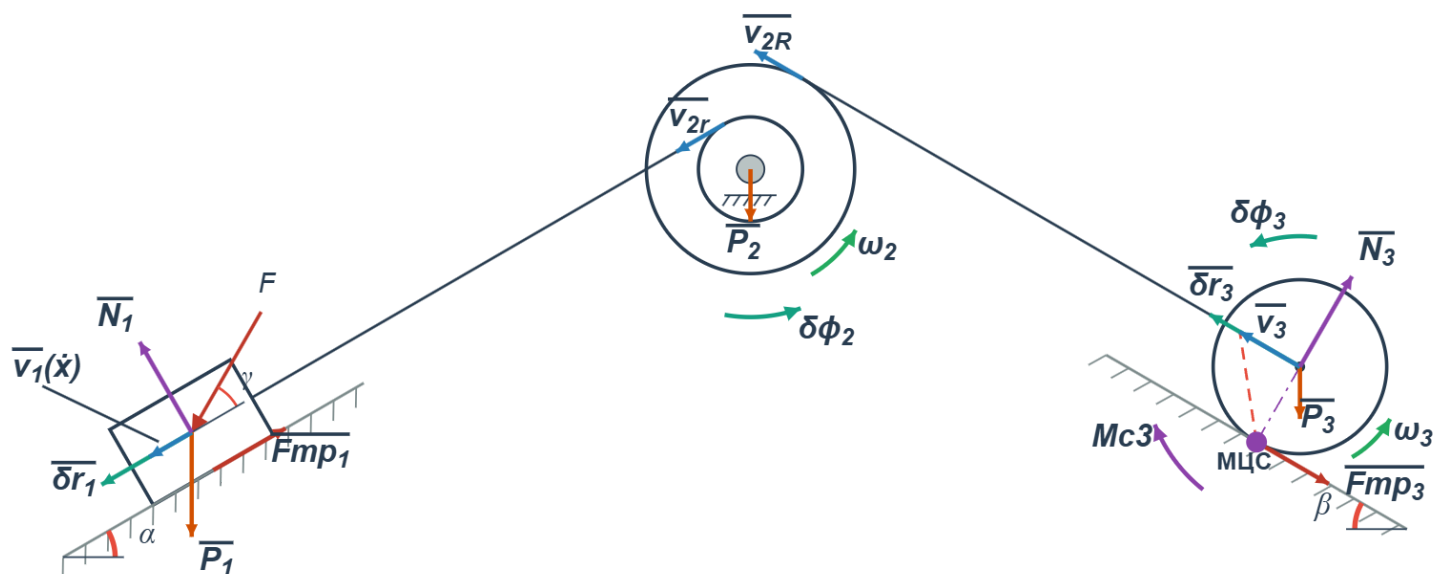


Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах (уравнение Лагранжа второго рода).

Решение:

Изображаем расчетную схему, на которой показываем кинематическую связь между телами и все действующие силы в механической системе.



Пользуясь расчетной схемой запишем кинематические соотношения, выразив скорости всех тел через $\dot{x}$.

$$V_{2r} = \dot{x}; \quad \omega_2 = \frac{\dot{x}}{r_2}; \quad V_{2R} = \frac{\dot{x} \cdot R_2}{r_2}; \quad V_3 = \frac{\dot{x} \cdot R_2}{r_2}$$

$$\omega_3 = \frac{\dot{x} \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3}$$

Выразим возможные перемещения всех тел через обобщенное перемещение δx .

$$\delta \phi_2 = \frac{\delta x}{r_2}; \quad \delta r_3 = \frac{\delta x \cdot R_2}{r_2}; \quad \delta \phi_3 = \frac{\delta x \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3}$$

В качестве обобщенной координаты выбираем перемещение тела 1 — x . Тогда $q = x$. Для этой координаты запишем уравнение Лагранжа второго рода.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q.$$

Вычисляем кинетическую энергию механической системы:

$$T = \sum_{k=1}^3 T_k = T_1 + T_2 + T_3$$

Тело 1

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 - \text{поступательное движение тела}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x})^2$$

Тело 2

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{c2} \omega_2^2 - \text{вращение тела вокруг неподвижной оси}$$

ρ_2 - радиус инерции тела 2

$$J_{c2} = m_2 \rho_2^2 - \text{момент инерции тела 2}$$

$$\omega_2 = \frac{\dot{x}}{r_2} - \text{угловая скорость тела 2}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} (m_2 \rho_2^2) \left(\frac{\dot{x}}{r_2} \right)^2$$

Тело 3

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2 + \frac{1}{2} J_{c3} \omega_3^2 - \text{плоское движение тела}$$

$$V_3 = \frac{\dot{x} \cdot R_2}{r_2} - \text{скорость центра масс тела 3}$$

$$J_{c3} = \frac{1}{2} m_3 R_3^2 - \text{момент инерции тела 3}$$

$$\omega_3 = \frac{\dot{x} \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3} - \text{угловая скорость тела 3}$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \left(\frac{\dot{x} \cdot R_2}{r_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_3 R_3^2 \right) \left(\frac{\dot{x} \cdot R_2}{r_2 \cdot R_3} \right)^2$$

Окончательно получаем

$$T = \frac{1}{2} \left[m_1 + \frac{\rho_2^2 \cdot m_2}{r_2^2} + \frac{\frac{3}{2} \cdot R_2^2 \cdot m_3}{r_2^2} \right] \dot{x}^2 = \frac{1}{2} a \dot{x}^2, \quad T = T(\dot{x})$$

$$\text{где } a = m_1 + \frac{\rho_2^2 \cdot m_2}{r_2^2} + \frac{\frac{3}{2} \cdot R_2^2 \cdot m_3}{r_2^2} - \text{коэффициент инерции (приведенная масса)}.$$

Расшишем левую часть уравнение Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = a \dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = a \ddot{x}.$$

Найдем сумму элементарных работ всех активных сил на возможном перемещении:

$$\delta A = -M c_3 \cdot \delta \phi_3 - P_3 \cdot \sin(\beta) \cdot \delta r_3 + P_1 \cdot \sin(\alpha) \cdot \delta r_1 - F_{mp1} \cdot \delta r_1 + F \cdot \cos(\gamma) \cdot \delta r_1$$

Определяем обобщенную силу по формуле:

$$Q = \frac{\delta A}{\delta q}, \text{ где } \delta q = \delta x$$

Используя ранее найденные кинематические соотношения, выразим все возможные перемещения в уравнении для δA через обобщенное перемещение δx и вынесем его за скобки:

$$\delta A = \left[-M c_3 \cdot \frac{R_2}{r_2 \cdot R_3} - m_3 g \cdot \sin(\beta) \cdot \frac{R_2}{r_2} + m_1 g \cdot \sin(\alpha) - F_{mp1} + F \cdot \cos(\gamma) \right] \delta x$$

$$Q = -M c_3 \cdot \frac{R_2}{r_2 \cdot R_3} - m_3 g \cdot \sin(\beta) \cdot \frac{R_2}{r_2} + m_1 g \cdot \sin(\alpha) - F_{mp1} + F \cdot \cos(\gamma)$$

Запишем общее уравнение динамики и найдем искомое ускорение:

$$a\ddot{x} = Q \implies \ddot{x} = \frac{Q}{a}$$

$$\ddot{x} = a_1 = \frac{-Mc_3 \cdot \frac{R_2}{r_2 \cdot R_3} - m_3 g \cdot \sin(\beta) \cdot \frac{R_2}{r_2} + m_1 g \cdot \sin(\alpha) - F_{mp1} + F \cdot \cos(\gamma)}{m_1 + \frac{\rho_2^2 \cdot m_2}{r_2^2} + \frac{\frac{3}{2} \cdot R_2^2 \cdot m_3}{r_2^2}}$$

Определим момент сопротивления качению.

$$M_{c3} = kN_3; \quad N_3 = P_3 \cdot \cos(\beta);$$

$$M_{c3} = k(m_3 g \cdot \cos(\beta)).$$

Определим силу трения скольжения.

$$F_{mp1} = N_1 f_1; \quad N_1 = P_1 \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\gamma);$$

$$F_{mp1} = (m_1 g \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\gamma)) f_1.$$

Подставив найденные силы, окончательно получаем:

$$\ddot{x} = a_1 = \frac{-(k(m_3 g \cdot \cos(\beta))) \cdot \frac{R_2}{r_2 \cdot R_3} - m_3 g \cdot \sin(\beta) \cdot \frac{R_2}{r_2} + m_1 g \cdot \sin(\alpha) - ((m_1 g \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \sin(\gamma)) f_1) + F \cdot \cos(\gamma)}{m_1 + \frac{\rho_2^2 \cdot m_2}{r_2^2} + \frac{\frac{3}{2} \cdot R_2^2 \cdot m_3}{r_2^2}}$$