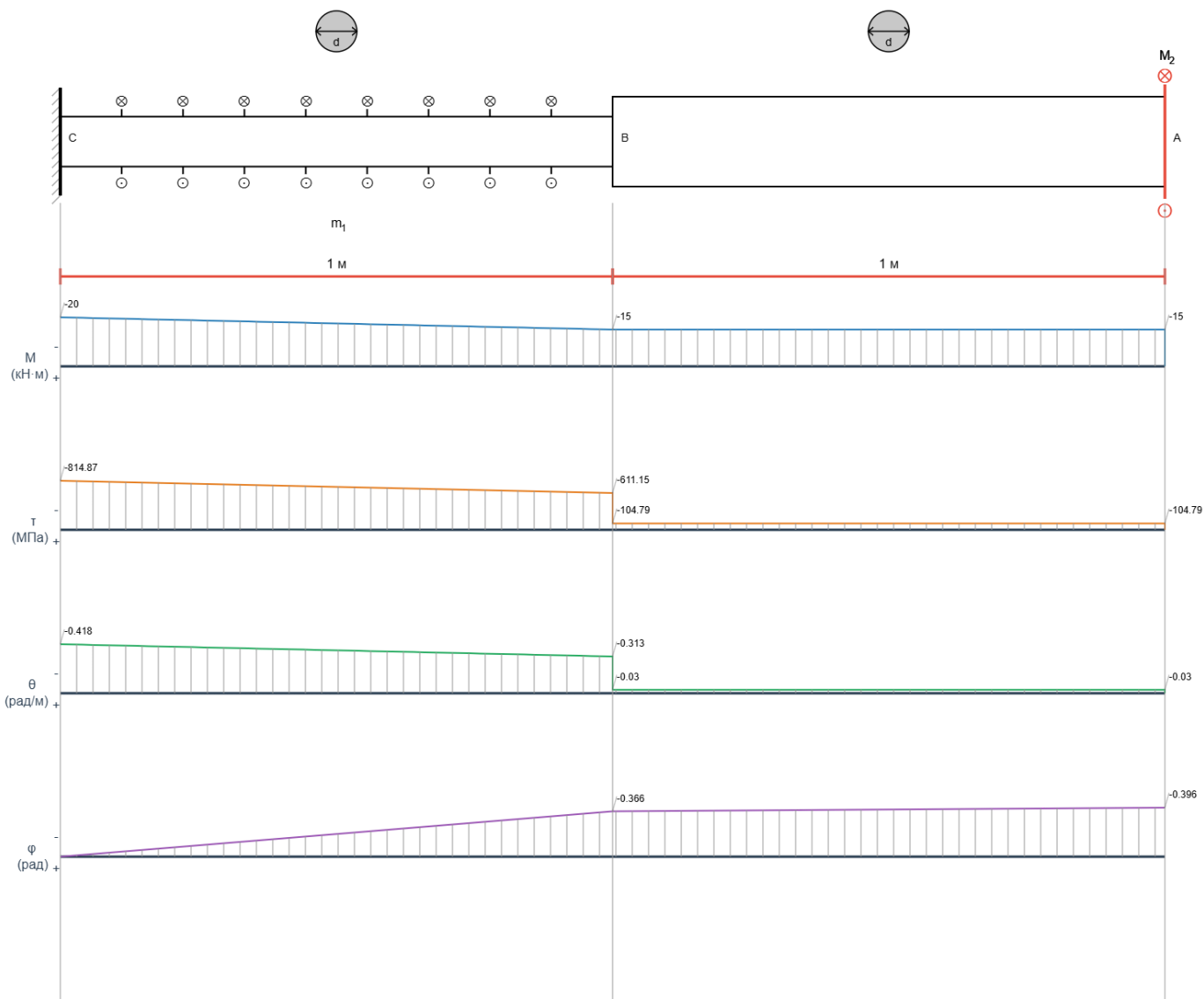




Исходные данные:

$$G = 78000 \text{ МПа}$$

Допускаемое напряжение по 3-й гипотезе прочности:

$$[\tau] = \frac{R}{2} = \frac{210}{2} = 105 \text{ МПа}$$

где:

$[\tau]$ — допускаемое касательное напряжение, МПа;

R — расчетное сопротивление материала, МПа.

Расчёт эпюры крутящих моментов M_z

$$\text{Участок AB: } M_z = -M_2 = -15 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\text{Участок BC: } M_z = -M_2 - m_1 \cdot (z - 1)$$

$$M_z(B) (z = 1 \text{ м}): -15 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$M_z(C) (z = 2 \text{ м}): -20 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Расчет Полярного момента сопротивления и Полярного момента инерции для каждого участка

Участок АВ

Длина: $L_{AB} = 1 \text{ м}$

Тип сечения: Круг

Максимальный момент на участке: $M_{\text{макс}} = 15 \text{ кН}\cdot\text{м}$

Требуемый полярный момент сопротивления:

$$W_p \geq \frac{M_{\text{макс}}}{[\tau]} = \frac{15000}{105 \cdot 10^6} = 142.86 \text{ см}^3$$

Для круглого сечения:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \geq 142.86 \text{ см}^3$$

$$d^3 \geq \frac{142.86 \cdot 16}{\pi} \approx 727.57 \text{ см}^3$$

$$d \geq \sqrt[3]{727.57} \approx 90 \text{ мм}$$

Принимаем: $d = 90 \text{ мм}$

Полярный момент сопротивления W_p

Для круглого сечения:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \cdot (0.09)^3}{16}$$

$$W_p = 143.14 \text{ см}^3$$

Полярный момент инерции J_p

Для круглого сечения:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot (0.09)^4}{32}$$

$$J_p = 644.12 \text{ см}^4$$

Участок ВС

Длина: $L_{BC} = 1 \text{ м}$

Тип сечения: Круг

Заданный диаметр: $d = 50 \text{ мм}$

Полярный момент сопротивления W_p

Для круглого сечения:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \cdot (0.05)^3}{16}$$

$$W_p = 24.54 \text{ см}^3$$

Полярный момент инерции J_p

Для круглого сечения:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot (0.05)^4}{32}$$

$$J_p = 61.36 \text{ см}^4$$

Расчет эпюры касательных напряжений τ : $\tau = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p}$

Участок АВ:

Полярный момент сопротивления: $W_p = 143.14 \text{ см}^3$

Крутящий момент: $M_{кр} = -15 \text{ кН}\cdot\text{м} = -15000 \text{ Н}\cdot\text{м}$

$$\tau = \frac{-15000}{143.14 \times 10^6} = -104.79 \text{ МПа}$$

Участок ВС:

Полярный момент сопротивления: $W_p = 24.54 \text{ см}^3$

В точке В ($z = 1 \text{ м}$):

Крутящий момент: $M_{кр} = -15 \text{ кН}\cdot\text{м} = -15000 \text{ Н}\cdot\text{м}$

$$\tau = \frac{-15000}{24.54 \times 10^6} = -611.15 \text{ МПа}$$

В точке С ($z = 2 \text{ м}$):

Крутящий момент: $M_{кр} = -20 \text{ кН}\cdot\text{м} = -20000 \text{ Н}\cdot\text{м}$

$$\tau = \frac{-20000}{24.54 \times 10^6} = -814.87 \text{ МПа}$$

Расчет эпюры относительных углов закручивания θ : $\theta = \frac{M_{кр}}{G \cdot J_p}$

Участок АВ:

Полярный момент инерции: $J_p = 6.44 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$

Крутящий момент: $M_{кр} = -15 \text{ кН}\cdot\text{м}$

$$\theta = \frac{-15000}{7.80 \cdot 10^{10} \cdot 6.44 \cdot 10^{-6}} = -0.03 \text{ рад/м}$$

Участок ВС:

Полярный момент инерции: $J_p = 6.14 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4$

В точке В ($z = 1 \text{ м}$):

$$\theta = \frac{-15000}{7.80 \cdot 10^{10} \cdot 6.14 \cdot 10^{-7}} = -0.313 \text{ рад/м}$$

В точке С ($z = 2 \text{ м}$):

$$\theta = \frac{-20000}{7.80 \cdot 10^{10} \cdot 6.14 \cdot 10^{-7}} = -0.418 \text{ рад/м}$$

Расчет эпюры углов поворота φ : $\varphi = \frac{M_{кр} \cdot L}{G \cdot J_p}$

$$\varphi(C) = 0 \text{ рад}$$

$$\varphi(B) = \varphi(C) + \frac{\left(\frac{(-20) + (-15)}{2}\right) \cdot 10^3 \cdot 1}{78000 \cdot 10^6 \cdot 61.36 \times 10^{-8}} = 0 - (0.366) = -0.366 \text{ рад}$$

$$\varphi(A) = \varphi(B) + \frac{(-15) \cdot 10^3 \cdot 1}{78000 \cdot 10^6 \cdot 644.12 \times 10^{-8}} = -0.366 - 0.03 = -0.396 \text{ рад}$$

Расчет минимального диаметра сечения

Проверка показала, что максимальный крутящий момент $M_{\max}$ возникает на участке с сечением типа **Круг**. Выполняем подбор диаметра.

Исходные данные для подбора:

- Максимальный крутящий момент (из эпюры): $M_{\max} = 20000 \text{ Н}\cdot\text{м}$
- Допускаемое напряжение (задано): $[\tau] = 105 \text{ МПа}$
- Допускаемый угол закручивания (задано): $[\theta] = 1.5 \text{ рад/м}$

1. Расчет диаметра из условия прочности

Максимальное напряжение не должно превышать допускаемое: $\tau_{\max} \leq [\tau]$.

Для сплошного круга $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$. Подставляем в условие прочности:

$$\frac{M_{\max}}{\pi d^3 / 16} \leq [\tau] \implies d^3 \geq \frac{16 \cdot M_{\max}}{\pi \cdot [\tau]}$$

Подставляем числовые значения:

$$d^3 \geq \frac{16 \cdot 20000}{\pi \cdot 1.05 \cdot 10^8} = 9.70 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$$

$$d_{\text{проч}} \geq \sqrt[3]{9.70 \cdot 10^{-4}} = 0.099 \text{ м} = 98.99 \text{ мм}$$

2. Расчет диаметра из условия жесткости

Максимальный относительный угол закручивания не должен превышать допускаемый: $\theta_{\max} \leq [\theta]$.

Для сплошного круга $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$. Подставляем в условие жесткости:

$$\frac{M_{\max}}{G \cdot (\pi d^4 / 32)} \leq [\theta] \implies d^4 \geq \frac{32 \cdot M_{\max}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}$$

Подставляем числовые значения:

$$d^4 \geq \frac{32 \cdot 20000}{\pi \cdot 7.80 \cdot 10^{10} \cdot 1.5} = 1.74 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$$

$$d_{\text{жест}} \geq \sqrt[4]{1.74 \cdot 10^{-6}} = 0.0363 \text{ м} = 36.33 \text{ мм}$$

Сравнивая диаметры, полученные из условия прочности ($d_{\text{проч}} = 98.99 \text{ мм}$) и условия жесткости ($d_{\text{жест}} = 36.33 \text{ мм}$), принимаем большее значение, чтобы удовлетворить обоим условиям.

Итоговый минимальный диаметр:

$$d_{\min} = 98.99 \text{ мм}$$

Расчет потенциальной энергии деформации (U) и работы внешних сил (A)

Для обеспечения точности расчета на участках с распределенной нагрузкой применяется метод численного интегрирования (формула Симпсона).

1. Внутренняя потенциальная энергия деформации (U)

Теоретическая справка:

Энергия, накопленная в конструкции, вычисляется через эпюру внутренних крутящих моментов $M_{\text{кр}}$. Для каждой нагрузки мы определяем ее вклад в общую энергию системы.

- На участке с постоянным моментом ($M_{\text{кр}} = \text{const}$):

$$U = \frac{M_{\text{кр}}^2 \cdot L}{2GJ_p}$$

- На участке с переменным моментом (используется формула Симпсона):

$$U \approx \frac{L}{12GJ_p} (M_1^2 + 4M_{\text{ср}}^2 + M_2^2)$$

Расчет вклада в энергию от каждой нагрузки:

$$U_{m_1} = \frac{L}{12GJ_p} (M_1^2 + 4M_{\text{ср}}^2 + M_2^2) = \frac{1}{12 \cdot 7.80 \cdot 10^{10} \cdot 6.14 \cdot 10^{-7}} [(-20000)^2 + 4(-17500)^2 + (-15000)^2] = 3221.187 \text{ Дж}$$

$$U_{M_2} = \frac{M_{\text{кр}}^2 L}{2GJ_p} = \frac{(-15000)^2 \cdot 1}{2 \cdot 7.80 \cdot 10^{10} \cdot 6.44 \cdot 10^{-6}} = 223.917 \text{ Дж}$$

Итоговая потенциальная энергия:

$$U = \sum U_i = (3221.187) + (223.917) = 3445.105 \text{ Дж}$$

2. Работа внешних сил (А)

Теоретическая справка:

Работа статических внешних сил равна половине произведения **внешней** силы на перемещение, вызванное этой силой:

- **От сосредоточенного момента $M_{\text{внеш}}$:**

$$A_M = \frac{1}{2} M_{\text{внеш}} \cdot \varphi_M$$

- **От распределенного момента $m_{\text{внеш}}$:**

$$A_m \approx \frac{m_{\text{внеш}} L}{12} (\varphi_1 + 4\varphi_{\text{ср}} + \varphi_2)$$

Расчет для каждой нагрузки:

$$A_{m_1} = \frac{m_{\text{внеш}} L}{12} (\varphi_1 + 4\varphi_{\text{ср}} + \varphi_2) = \frac{(5000) \cdot 1}{12} [0 + 4 \cdot (-0.1959) + (-0.3656)] = 478.825 \text{ Дж}$$

$$A_{M_2} = \frac{1}{2} M_{\text{внеш}} \varphi = \frac{1}{2} \cdot (15000) \cdot (-0.3955) = 2966.28 \text{ Дж}$$

Итоговая работа внешних сил:

$$A = \sum A_i = (478.825) + (2966.28) = 3445.105 \text{ Дж}$$

3. Проверка по теореме Клайперона

Вывод: Потенциальная энергия системы равна работе внешних сил, расчет верен.

$$U = 3445.105 \text{ Дж} \approx A = 3445.105 \text{ Дж}$$