

Исходные данные (Дано):

$$G = 78000 \text{ МПа}$$

$$[\tau] = 100 \text{ МПа}$$

Поиск реакции опоры  $M_A$

## Расчет эпюры крутящих моментов $M_z$

Участок АВ:  $M_z = 0$  кН·м

Участок ВС:  $M_z = -M_1 - m_1 \cdot (z - 1)$

$M_z(B)$  ( $z = 1$  м):  $-10$  кН·м

$M_z(C)$  ( $z = 2$  м):  $-15$  кН·м

## Расчет геометрических характеристик сечений ( $W_p$ и $J_p$ )

### Участок АВ

Длина:  $L_{AB} = 1$  м

Тип сечения: Круг

Заданный диаметр:  $d = 60$  мм

#### Полярный момент сопротивления $W_p$

Для круглого сечения:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \cdot (0.06)^3}{16}$$

$$W_p = 42.41 \text{ см}^3$$

#### Полярный момент инерции $J_p$

Для круглого сечения:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot (0.06)^4}{32}$$

$$J_p = 127.23 \text{ см}^4$$

### Участок ВС

Длина:  $L_{BC} = 1$  м

Тип сечения: Круг

Заданный диаметр:  $d = 50$  мм

#### Полярный момент сопротивления $W_p$

Для круглого сечения:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi \cdot (0.05)^3}{16}$$

$$W_p = 24.54 \text{ см}^3$$

#### Полярный момент инерции $J_p$

Для круглого сечения:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot (0.05)^4}{32}$$

$$J_p = 61.36 \text{ см}^4$$

Расчет эпюры углов поворота  $\varphi$ : 
$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot L}{G \cdot J_p}$$

$$\varphi(C) = 0 \text{ рад}$$

$$\varphi(B) = \varphi(C) + \frac{\left(\frac{(-15) + (-10)}{2}\right) \cdot 10^3 \cdot 1}{78000 \cdot 10^6 \cdot 61.36 \cdot 10^{-8}} = 0.000 - (0.2612) = -0.2612 \text{ рад}$$

$$\varphi(A) = \varphi(B) + \frac{0 \cdot 10^3 \cdot 1}{78000 \cdot 10^6 \cdot 127.23 \cdot 10^{-8}} = -0.2612 + 0.000 = -0.2612 \text{ рад}$$

## Расчет углов поворота от момента в правой заделке

Рассчитываем  $\varphi$  для каждого участка от момента  $M_A$  в (точке А), по часовой стрелке

$$\varphi_{A-B} = -\frac{M_A \cdot 10^3 \cdot 1}{78000 \cdot 10^6 \cdot 61.36 \cdot 10^{-8}} = -0.02089 \cdot M_A$$

$$\varphi_{B-C} = -\frac{M_A \cdot 10^3 \cdot 1}{78000 \cdot 10^6 \cdot 127.23 \cdot 10^{-8}} = -0.01008 \cdot M_A$$

$$\text{Общее } \varphi_{M_A} = \sum \varphi_i$$

$$\varphi_{M_A} = -(0.02089 + 0.01008) \cdot M_A = -0.03097 \cdot M_A$$

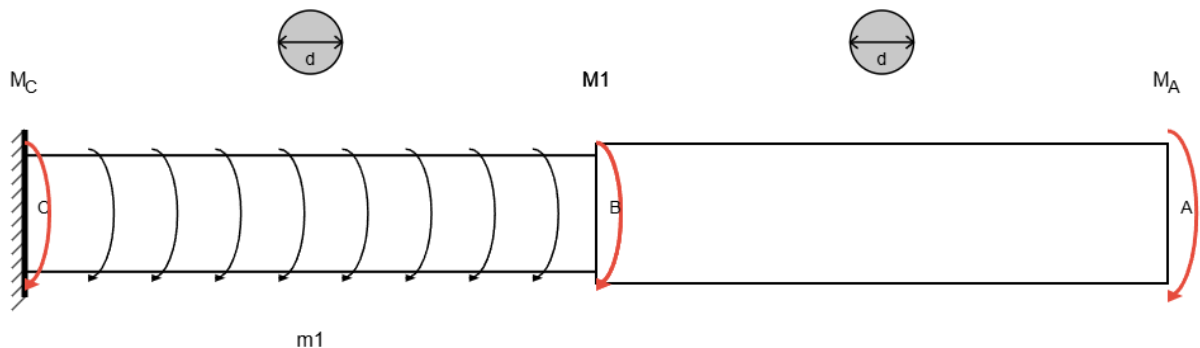
## Определение реакции опоры $M_A$

$$\varphi_{(A)} + \varphi_{M_A} = 0$$

$$-0.2612 - 0.03097 \cdot M_A = 0$$

$$M_A = \frac{-0.2612}{0.03097} = -8.433 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Теперь, имея реакцию  $M_A$ , рассчитываем вал как статически определимый.



## Расчет с учётом $M_A$

### Расчет эпюры крутящих моментов $M_z$

$$\text{Участок АВ: } M_z = -M_A = 8.43 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\text{Участок ВС: } M_z = -M_A - M_1 - m_1 \cdot (z - 1)$$

$$M_z(B) \text{ (} z = 1 \text{ м): } -1.57 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$M_z(C) \text{ (} z = 2 \text{ м): } -6.57 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

### Расчет эпюры касательных напряжений $\tau$ : $\tau = \frac{M_{кр}}{W_p}$

**Участок АВ:**

Полярный момент сопротивления:  $W_p = 42.41 \text{ см}^3$

Крутящий момент:  $M_{кр} = 8.43 \text{ кН}\cdot\text{м} = 8433.11 \text{ Н}\cdot\text{м}$

$$\tau = \frac{8433.11}{42.41 \times 10^6} = 198.84 \text{ МПа}$$

**Участок ВС:**

Полярный момент сопротивления:  $W_p = 24.54 \text{ см}^3$

В точке В ( $z = 1 \text{ м}$ ):

Крутящий момент:  $M_{кр} = -1.57 \text{ кН}\cdot\text{м} = -1566.89 \text{ Н}\cdot\text{м}$

$$\tau = \frac{-1566.89}{24.54 \times 10^6} = -63.84 \text{ МПа}$$

В точке С ( $z = 2 \text{ м}$ ):

Крутящий момент:  $M_{кр} = -6.57 \text{ кН}\cdot\text{м} = -6566.89 \text{ Н}\cdot\text{м}$

$$\tau = \frac{-6566.89}{24.54 \times 10^6} = -267.56 \text{ МПа}$$

**Расчет эпюры относительных углов закручивания  $\theta$ :**  $\theta = \frac{M_{кр}}{G \cdot J_p}$

**Участок АВ:**

Полярный момент инерции:  $J_p = 1.272 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4$

Крутящий момент:  $M_{кр} = 8.43 \text{ кН}\cdot\text{м}$

$$\theta = \frac{8433.11}{7.800 \cdot 10^{10} \cdot 1.272 \cdot 10^{-6}} = 0.08497 \text{ рад/м}$$

**Участок ВС:**

Полярный момент инерции:  $J_p = 6.136 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4$

В точке В ( $z = 1 \text{ м}$ ):

$$\theta = \frac{-1566.89}{7.800 \cdot 10^{10} \cdot 6.136 \cdot 10^{-7}} = -0.03274 \text{ рад/м}$$

В точке С ( $z = 2 \text{ м}$ ):

$$\theta = \frac{-6566.89}{7.800 \cdot 10^{10} \cdot 6.136 \cdot 10^{-7}} = -0.1372 \text{ рад/м}$$

**Расчет эпюры углов поворота  $\varphi$ :**  $\varphi = \frac{M_{кр} \cdot L}{G \cdot J_p}$

$$\varphi(C) = 0 \text{ рад}$$

$$\varphi(B) = \varphi(C) + \frac{\left(\frac{(-6.57) + (-1.57)}{2}\right) \cdot 10^3 \cdot 1}{78000 \cdot 10^6 \cdot 61.36 \cdot 10^{-8}} = 0.000 - (0.08497) = -0.08497 \text{ рад}$$

$$\varphi(A) = \varphi(B) + \frac{8.43 \cdot 10^3 \cdot 1}{78000 \cdot 10^6 \cdot 127.23 \cdot 10^{-8}} = -0.08497 + 0.08497 = 1.388e - 17 \text{ рад}$$

## Расчет минимального диаметра сечения

Проверка показала, что максимальный крутящий момент  $M_{\max}$  возникает на участке с сечением типа **Круг**. Выполняем подбор диаметра.

### Исходные данные для подбора:

- Максимальный крутящий момент (из эпюры):  $M_{\max} = 8433.11 \text{ Н}\cdot\text{м}$
- Допускаемое напряжение:  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$
- Допускаемый угол закручивания (задано):  $[\theta] = 1.5 \text{ рад/м}$

### 1. Расчет диаметра из условия прочности

Максимальное напряжение не должно превышать допускаемое:  $\tau_{\max} \leq [\tau]$ .

Для сплошного круга  $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ . Подставляем в условие прочности:

$$\frac{M_{\max}}{\pi d^3 / 16} \leq [\tau] \implies d^3 \geq \frac{16 \cdot M_{\max}}{\pi \cdot [\tau]}$$

Подставляем числовые значения:

$$d^3 \geq \frac{16 \cdot 8433.11}{\pi \cdot 1.000 \cdot 10^8} = 4.295 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$$

$$d_{\text{проч}} \geq \sqrt[3]{4.295 \cdot 10^{-4}} = 0.0754 \text{ м} = 75.45 \text{ мм}$$

### 2. Расчет диаметра из условия жесткости

Максимальный относительный угол закручивания не должен превышать допускаемый:  $\theta_{\max} \leq [\theta]$ .

Для сплошного круга  $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ . Подставляем в условие жесткости:

$$\frac{M_{\max}}{G \cdot (\pi d^4 / 32)} \leq [\theta] \implies d^4 \geq \frac{32 \cdot M_{\max}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}$$

Подставляем числовые значения:

$$d^4 \geq \frac{32 \cdot 8433.11}{\pi \cdot 7.800 \cdot 10^{10} \cdot 1.500} = 7.342 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4$$

$$d_{\text{жест}} \geq \sqrt[4]{7.342 \cdot 10^{-7}} = 0.0293 \text{ м} = 29.27 \text{ мм}$$

Сравнивая диаметры, полученные из условия прочности ( $d_{\text{проч}} = 75.45 \text{ мм}$ ) и условия жесткости ( $d_{\text{жест}} = 29.27 \text{ мм}$ ), принимаем большее значение, чтобы удовлетворить обоим условиям.

### Итоговый минимальный диаметр:

$$d_{\min} = 75.45 \text{ мм}$$

## Расчет потенциальной энергии деформации (U) и работы внешних сил (A)

### 1. Внутренняя потенциальная энергия деформации (U)

Теоретическая справка:

Энергия, накопленная в конструкции, вычисляется для каждого участка в зависимости от характера эпюры крутящего момента  $M_{кр}$ .

- Для участка с **постоянным моментом** (где  $m = 0$ ):

$$U = \frac{M_{кр}^2 \cdot L}{2GJ_p}$$

- Для участка с **переменным моментом** (где  $m \neq 0$ ), интеграл вычисляется по формуле Симпсона:

$$U = \int_L \frac{M_{кр}(x)^2}{2GJ_p} dx = \frac{L}{12GJ_p} (M_{кр1}^2 + 4M_{кр,ср}^2 + M_{кр2}^2)$$

Расчет энергии для каждого участка:

**Для участка АВ:**

$$U_{AB} = \frac{L}{12GJ_p} (M_{кр1}^2 + 4M_{кр,ср}^2 + M_{кр2}^2) = \frac{1}{12 \cdot 7.800 \cdot 10^{10} \cdot 6.136 \cdot 10^{-7}} [(-6566.89)^2 + 4(-4066.89)^2 + (-1566.89)^2] = 194.556 \text{ Дж}$$

**Для участка ВС:**

$$U_{BC} = \frac{M_{кр}^2 L}{2GJ_p} = \frac{(8433.11)^2 \cdot 1}{2 \cdot 7.800 \cdot 10^{10} \cdot 1.272 \cdot 10^{-6}} = 358.299 \text{ Дж}$$

**Итоговая потенциальная энергия:**

$$U = \sum U_i = 194.556 + 358.299 = 552.855 \text{ Дж}$$

## 2. Работа внешних сил (А)

**Теоретическая справка:**

Работа статических внешних сил равна половине произведения **внешней** силы на перемещение, вызванное этой силой:

- От **сосредоточенного момента**  $M_{внеш}$ :

$$A_M = \frac{1}{2} M_{внеш} \cdot \varphi_M$$

- От **распределенного момента**  $m_{внеш}$ :

$$A_m = \frac{1}{2} \int_L m_{внеш} \cdot \varphi(x) dx \approx \frac{m_{внеш} L}{12} (\varphi_1 + 4\varphi_{ср} + \varphi_2)$$

Расчет для каждой нагрузки:

$$A_{M_1} = \frac{1}{2} M_{внеш} \varphi = \frac{1}{2} \cdot (10000) \cdot (0.085) = 424.872 \text{ Дж}$$

$$A_{m_1} \approx \frac{m_{внеш}}{2} \int_L \varphi dx \approx \frac{m_{внеш} L}{12} (\varphi_1 + 4\varphi_{ср} + \varphi_2) = \frac{(5000) \cdot 1}{12} [0 + 4 \cdot 0.0555 + 0.085] = 127.983 \text{ Дж}$$

$$A_{M_A} = \frac{1}{2} M_{внеш} \varphi = \frac{1}{2} \cdot (-8433) \cdot (0) = 0 \text{ Дж}$$

**Итоговая работа внешних сил:**

$$A = \sum A_i = (424.872) + (127.983) + (0) = 552.855 \text{ Дж}$$

## 3. Проверка по теореме Клайперона

**Вывод:** Потенциальная энергия системы равна работе внешних сил, расчет верен.

$$U = 552.855 \text{ Дж} \approx A = 552.855 \text{ Дж}$$