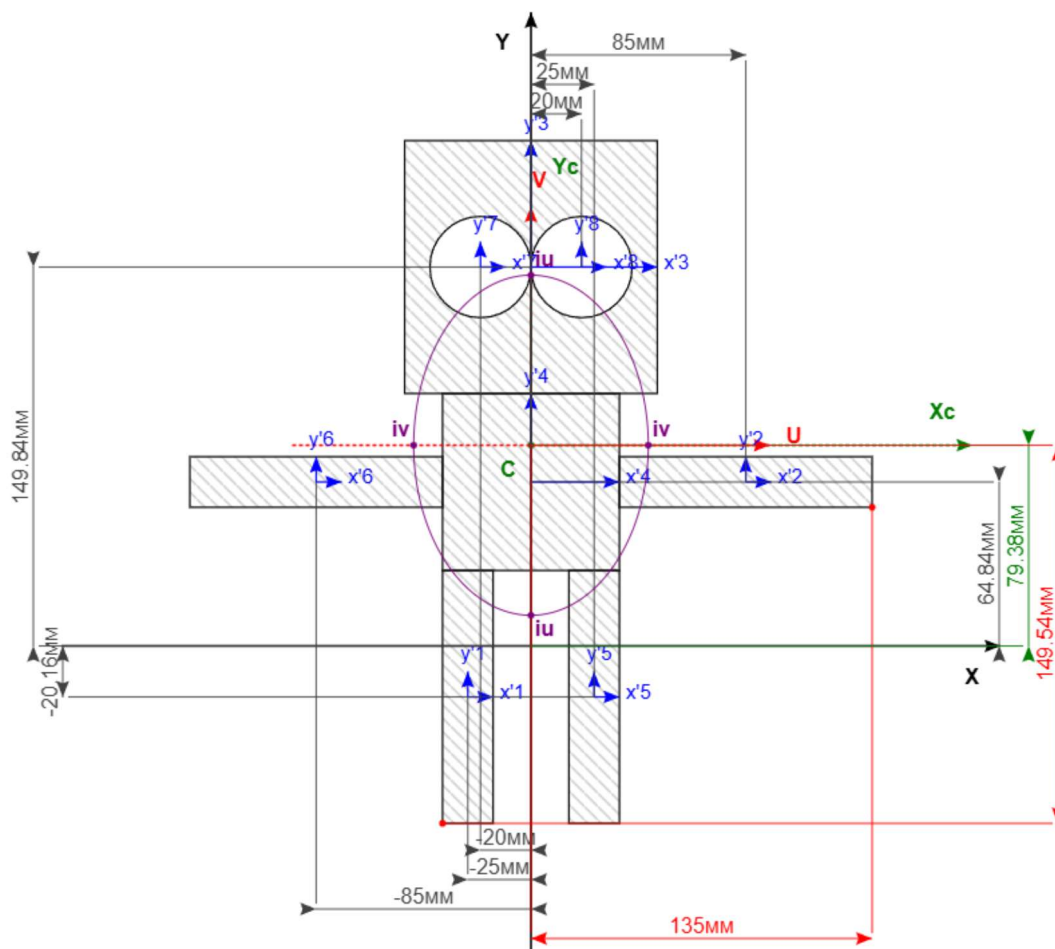


Детальный вид сечения



Расчёт центра тяжести (сокращенный)

Решение. Координаты центра тяжести плоской фигуры определяем по формулам

x_C = S_y / F; y_C = S_x / F. (1)

Здесь S_y = ∑ F_i x_i, S_x = ∑ F_i y_i – статические моменты площади фигуры относительно осей y и x, F – площадь фигуры.

Чтобы воспользоваться формулами (1), делим плоскую фигуру на части, для которых известны или легко определяются площади F_i и координаты центров тяжести x_i, y_i относительно общих осей X, Y.

В данном случае в качестве таких частей принимаем 4 прямоугольник, 2 квадрат, 2 круг. Площади фигур, вырезанных (отверстий), считаются отрицательными.

Все расчетные данные заносим в таблицу (табл. 1).

Таблица 1

Номер/ название фигуры	F _i , мм ²	x _i , мм	y _i , мм	S _{iy} = F _i x _i , мм ³	S _{ix} = F _i y _i , мм ³
1. Прямоугольник	A ₁ = b · h = 20 · 100 ≈ 2000	-25	-20,16	-50000	-40315.66
2. Прямоугольник	A ₂ = b · h = 20 · 100 ≈ 2000	85	64,84	170000	129684.34
3. Квадрат	A ₃ = a ² = (100) ² ≈ 10000	0	149,84	0	1498421.71
4. Квадрат	A ₄ = a ² = (70) ² ≈ 4900	0	64,84	0	317726.64
5. Прямоугольник	A ₅ = b · h = 20 · 100 ≈ 2000	25	-20,16	50000	-40315.66
6. Прямоугольник	A ₆ = b · h = 20 · 100 ≈ 2000	-85	64,84	-170000	129684.34
7. Круг (отверстие)	A ₇ = πr ² = π(20) ² ≈ 1256.64	-20	149,84	25132.74	-188297.22
8. Круг (отверстие)	A ₈ = πr ² = π(20) ² ≈ 1256.64	20	149,84	-25132.74	-188297.22

Определим суммарную площадь и статические моменты всего сечения, используя данные из таблицы:

F = ∑ F_i = 2000 + 2000 + 10000 + 4900 + 2000 + 2000 – 1256.64 – 1256.64 = 20386.73 мм²

S_y = ∑ S_{iy} = (–50000) + 170000 + 0 + 0 + 50000 + (–170000) + 25132.74 + (–25132.74) = 0 мм³

S_x = ∑ S_{ix} = (–40315.66) + 129684.34 + 1498421.71 + 317726.64 + (–40315.66) + 129684.34 + (–188297.22) + (–188297.22) = 1618291.26 мм³

Координаты центров тяжести (ЦТ) собственных простых фигур в их локальных системах координат:

1. Прямоугольник

X_{c1} = b / 2 = 20 / 2 = 10 мм

Y_{c1} = h / 2 = 100 / 2 = 50 мм

2. Прямоугольник

X_{c2} = b / 2 = 20 / 2 = 10 мм

Y_{c2} = h / 2 = 100 / 2 = 50 мм

3. Квадрат

X_{c3} = a / 2 = 100 / 2 = 50 мм

Y_{c3} = a / 2 = 100 / 2 = 50 мм

4. Квадрат

X_{c4} = a / 2 = 70 / 2 = 35 мм

Y_{c4} = a / 2 = 70 / 2 = 35 мм

5. Прямоугольник

X_{c5} = b / 2 = 20 / 2 = 10 мм

Y_{c5} = h / 2 = 100 / 2 = 50 мм

6. Прямоугольник

X_{c6} = b / 2 = 20 / 2 = 10 мм

Y_{c6} = h / 2 = 100 / 2 = 50 мм

7. Круг

X_{c7} = r = 20 = 20 мм

Y_{c7} = r = 20 = 20 мм

8. Круг

$$X_{c8} = r = 20 = 20 \text{ мм}$$

$$Y_{c8} = r = 20 = 20 \text{ мм}$$

Примечание: Эти координаты X_{ci}, Y_{ci} определяют положение центра тяжести каждой простой фигуры относительно ее собственной локальной системы координат (например, от угла, основания или геометрического центра фигуры). Они могут отличаться от координат x_i, y_i в Таблице 1, так как последние указаны относительно общих глобальных осей X и Y всего сечения.

По формулам (1) вычисляем координаты центра тяжести всей плоской фигуры:

$$x_C = \frac{\sum S_{iy}}{\sum F_i} = \frac{0}{20386.73} = 0 \text{ мм};$$

$$y_C = \frac{\sum S_{ix}}{\sum F_i} = \frac{1618291.26}{20386.73} = 79,38 \text{ мм}.$$

Центр тяжести сечения $C(x_C, y_C)$ указан на эскизе.

Расчет геометрических характеристик сечения (сокращенный)

Определяем моменты инерции простых фигур относительно их собственных центральных осей (x'_i, y'_i) , а затем переносим их к общим центральным осям сечения (x_C, y_C) с помощью теоремы Штейнера (Гюйгенса-Штейнера):

$$I_x = I_{x'} + A \cdot b^2$$
$$I_y = I_{y'} + A \cdot a^2$$
$$I_{xy} = I_{x'y'} + A \cdot a \cdot b$$

Где $a_i = x_i - x_C$ и $b_i = y_i - y_C$ — смещения центра тяжести i -й фигуры по осям Y_C и X_C соответственно, A_i — площадь фигуры.

Таблица 2 (Геометрические характеристики)

Номер/ название фигуры	Площадь $A_i, \text{мм}^2$	Собственные центральные моменты инерции (с учетом поворота фигуры), мм^4			Координаты смещения $a_i, b_i, \text{мм}$	
		$I_{x'i}$	$I_{y'i}$	$I_{x'y'i}$	$a_i = x_i - x_C$	$b_i = y_i - y_C$
1. Прямоугольник	2000	1666666,67	66666,67	0	-25	-99,54
2. Прямоугольник	2000	66666,67	1666666,67	0	85	-14,54
3. Квадрат	10000	8333333,33	8333333,33	0	0	70,46
4. Квадрат	4900	2000833,33	2000833,33	0	0	-14,54
5. Прямоугольник	2000	1666666,67	66666,67	0	25	-99,54
6. Прямоугольник	2000	66666,67	1666666,67	0	-85	-14,54
7. Круг (отв.)	-1256,64	125663,71	125663,71	0	-20	70,46
8. Круг (отв.)	-1256,64	125663,71	125663,71	0	20	70,46

Детальный расчет моментов инерции для каждой фигуры

1. Прямоугольник :

$$I_{x'} = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot (100)^3}{12} = 1666666,67 \text{ мм}^4$$
$$I_{y'} = \frac{hb^3}{12} = \frac{100 \cdot (20)^3}{12} = 66666,67 \text{ мм}^4$$
$$I_{x'y'} = 0 = 0 \text{ мм}^4$$

Моменты инерции относительно осей x_C, y_C по теореме Штейнера:

$$I_x = I_{x'} + A_i b_i^2 = 1666666,67 + 2000 \cdot (-99,54)^2 = 21482088,08 \text{ мм}^4$$
$$I_y = I_{y'} + A_i a_i^2 = 66666,67 + 2000 \cdot (-25)^2 = 1316666,67 \text{ мм}^4$$
$$I_{xy} = I_{x'y'} + A_i a_i b_i = 0 + 2000 \cdot (-25) \cdot (-99,54) = 4976874,2 \text{ мм}^4$$

2. Прямоугольник :

$$I_{x'} = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot (100)^3}{12} = 1666666,67 \text{ мм}^4$$
$$I_{y'} = \frac{hb^3}{12} = \frac{100 \cdot (20)^3}{12} = 66666,67 \text{ мм}^4$$
$$I_{x'y'} = 0 = 0 \text{ мм}^4$$

С учетом поворота фигуры на $\theta = 90^\circ$ ($\cos \theta \approx 0, \sin \theta \approx 1$):

$$I_{x'_{\text{пов.}}} = 1666666,67 \cos^2 90^\circ + 66666,67 \sin^2 90^\circ - 2(0) \sin 90^\circ \cos 90^\circ = 66666,67$$
$$I_{y'_{\text{пов.}}} = 1666666,67 \sin^2 90^\circ + 66666,67 \cos^2 90^\circ + 2(0) \sin 90^\circ \cos 90^\circ = 1666666,67$$
$$I_{x'y'_{\text{пов.}}} = (1666666,67 - 66666,67) \sin 90^\circ \cos 90^\circ + (0)(\cos^2 90^\circ - \sin^2 90^\circ) = 0$$

Моменты инерции относительно осей x_C, y_C по теореме Штейнера:

$$I_x = I_{x'} + A_i b_i^2 = 66666,67 + 2000 \cdot (-14,54)^2 = 489343,54 \text{ мм}^4$$
$$I_y = I_{y'} + A_i a_i^2 = 1666666,67 + 2000 \cdot (85)^2 = 16116666,67 \text{ мм}^4$$
$$I_{xy} = I_{x'y'} + A_i a_i b_i = 0 + 2000 \cdot (85) \cdot (-14,54) = -2471372,27 \text{ мм}^4$$

3. Квадрат :

$$I_{x'} = \frac{a^4}{12} = \frac{(100)^4}{12} = 8333333,33 \text{ мм}^4$$
$$I_{y'} = \frac{a^4}{12} = \frac{(100)^4}{12} = 8333333,33 \text{ мм}^4$$
$$I_{x'y'} = 0 = 0 \text{ мм}^4$$

Моменты инерции относительно осей x_C, y_C по теореме Штейнера:

$$I_x = I_{x'} + A_i b_i^2 = 8333333,33 + 10000 \cdot (70,46)^2 = 57982995,06 \text{ мм}^4$$
$$I_y = I_{y'} + A_i a_i^2 = 8333333,33 + 10000 \cdot (0)^2 = 8333333,33 \text{ мм}^4$$
$$I_{xy} = I_{x'y'} + A_i a_i b_i = 0 + 10000 \cdot (0) \cdot (70,46) = 0 \text{ мм}^4$$

4. Квадрат :

$$I_{x'} = \frac{a^4}{12} = \frac{(70)^4}{12} = 2000833,33 \text{ мм}^4$$

$$I_y = \frac{a^4}{12} = \frac{(70)^4}{12} = 2000833,33 \text{ мм}^4$$

$$I_{x'y'} = 0 = 0 \text{ мм}^4$$

Моменты инерции относительно осей x_C, y_C по теореме Штейнера:

$$I_x = I_{x'} + A_i b_i^2 = 2000833,33 + 4900 \cdot (-14,54)^2 = 3036391,68 \text{ мм}^4$$

$$I_y = I_{y'} + A_i a_i^2 = 2000833,33 + 4900 \cdot (0)^2 = 2000833,33 \text{ мм}^4$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + A_i a_i b_i = 0 + 4900 \cdot (0) \cdot (-14,54) = 0 \text{ мм}^4$$

5. Прямоугольник :

$$I_{x'} = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot (100)^3}{12} = 1666666,67 \text{ мм}^4$$

$$I_{y'} = \frac{hb^3}{12} = \frac{100 \cdot (20)^3}{12} = 66666,67 \text{ мм}^4$$

$$I_{x'y'} = 0 = 0 \text{ мм}^4$$

Моменты инерции относительно осей x_C, y_C по теореме Штейнера:

$$I_x = I_{x'} + A_i b_i^2 = 1666666,67 + 2000 \cdot (-99,54)^2 = 21482088,08 \text{ мм}^4$$

$$I_y = I_{y'} + A_i a_i^2 = 66666,67 + 2000 \cdot (25)^2 = 1316666,67 \text{ мм}^4$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + A_i a_i b_i = 0 + 2000 \cdot (25) \cdot (-99,54) = -4976874,2 \text{ мм}^4$$

6. Прямоугольник :

$$I_{x'} = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot (100)^3}{12} = 1666666,67 \text{ мм}^4$$

$$I_{y'} = \frac{hb^3}{12} = \frac{100 \cdot (20)^3}{12} = 66666,67 \text{ мм}^4$$

$$I_{x'y'} = 0 = 0 \text{ мм}^4$$

С учетом поворота фигуры на $\theta = 90^\circ$ ($\cos \theta \approx 0, \sin \theta \approx 1$):

$$I_{x'_{\text{пов}}} = 1666666,67 \cos^2 90^\circ + 66666,67 \sin^2 90^\circ - 2(0) \sin 90^\circ \cos 90^\circ = 66666,67$$

$$I_{y'_{\text{пов}}} = 1666666,67 \sin^2 90^\circ + 66666,67 \cos^2 90^\circ + 2(0) \sin 90^\circ \cos 90^\circ = 1666666,67$$

$$I_{x'y'_{\text{пов}}} = (1666666,67 - 66666,67) \sin 90^\circ \cos 90^\circ + (0)(\cos^2 90^\circ - \sin^2 90^\circ) = 0$$

Моменты инерции относительно осей x_C, y_C по теореме Штейнера:

$$I_x = I_{x'} + A_i b_i^2 = 66666,67 + 2000 \cdot (-14,54)^2 = 489343,54 \text{ мм}^4$$

$$I_y = I_{y'} + A_i a_i^2 = 1666666,67 + 2000 \cdot (-85)^2 = 16116666,67 \text{ мм}^4$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + A_i a_i b_i = 0 + 2000 \cdot (-85) \cdot (-14,54) = 2471372,27 \text{ мм}^4$$

7. Круг (отверстие):

$$I_{x'} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi(20)^4}{4} = 125663,71 \text{ мм}^4$$

$$I_{y'} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi(20)^4}{4} = 125663,71 \text{ мм}^4$$

$$I_{x'y'} = 0 = 0 \text{ мм}^4$$

Моменты инерции относительно осей x_C, y_C по теореме Штейнера:

$$I_x = I_{x'} + A_i b_i^2 = 125663,71 + 1256,64 \cdot (70,46)^2 = 6364824,21 \text{ мм}^4$$

$$I_y = I_{y'} + A_i a_i^2 = 125663,71 + 1256,64 \cdot (-20)^2 = 628318,53 \text{ мм}^4$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + A_i a_i b_i = 0 + 1256,64 \cdot (-20) \cdot (70,46) = -1770916,18 \text{ мм}^4$$

8. Круг (отверстие):

$$I_{x'} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi(20)^4}{4} = 125663,71 \text{ мм}^4$$

$$I_{y'} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi(20)^4}{4} = 125663,71 \text{ мм}^4$$

$$I_{x'y'} = 0 = 0 \text{ мм}^4$$

Моменты инерции относительно осей x_C, y_C по теореме Штейнера:

$$I_x = I_{x'} + A_i b_i^2 = 125663,71 + 1256,64 \cdot (70,46)^2 = 6364824,21 \text{ мм}^4$$

$$I_y = I_{y'} + A_i a_i^2 = 125663,71 + 1256,64 \cdot (20)^2 = 628318,53 \text{ мм}^4$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + A_i a_i b_i = 0 + 1256,64 \cdot (20) \cdot (70,46) = 1770916,18 \text{ мм}^4$$

Итоговые моменты инерции сечения

Суммируем моменты инерции всех частей (учитывая, что для отверстий они вычитаются):

$$I_x = \sum I_{xi} = 21482088,08 + 489343,54 + 57982995,06 + 3036391,68 + 21482088,08 + 489343,54 + (-6364824,21) + (-6364824,21) = 92232601,57 \text{ мм}^4$$

$$I_y = \sum I_{yi} = 1316666,67 + 16116666,67 + 8333333,33 + 2000833,33 + 1316666,67 + 16116666,67 + (-628318,53) + (-628318,53) = 43944196,27 \text{ мм}^4$$

$$I_{xy} = \sum I_{xyi} = 4976874,2 + (-2471372,27) + 0 + 0 + (-4976874,2) + 2471372,27 + 1770916,18 + (-1770916,18) = 0 \text{ мм}^4$$

3. Угол наклона главных осей (α_0)

Так как $I_{xy} = 0 \approx 0$, главные оси совпадают с центральными осями x_C, y_C .

Принимаем $\alpha_0 = 0^\circ$

Угол α_0 отсчитывается от оси x_C до главной оси u против часовой стрелки.

4. Главные центральные моменты инерции (I_u, I_v)

$$I_{u,v} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_u = 92232601,57 \text{ мм}^4$$

$$I_v = 43944196,27 \text{ мм}^4$$

Максимальный главный момент: $I_{\max} = 92232601,57 \text{ мм}^4$

Минимальный главный момент: $I_{\min} = 43944196,27 \text{ мм}^4$

Проверка: $I_u + I_v = 136176797,84 \approx I_x + I_y = 136176797,84$

5. Максимальные координаты в главных осях ($|u_{\max}|, |v_{\max}|$)

Координаты наиболее удаленных точек сечения от главных осей u, v (определяются по эскизу или дополнительным расчетом):

$$|u_{\max}| = 135 \text{ мм}$$

$$|v_{\max}| = 149,54 \text{ мм}$$

6. Главные моменты сопротивления (W_u, W_v)

$$W_u = \frac{I_u}{|v_{\max}|} = \frac{92232601,57}{149,54} = 616785,83 \text{ мм}^3$$

$$W_v = \frac{I_v}{|u_{\max}|} = \frac{43944196,27}{135} = 325512,56 \text{ мм}^3$$

7. Главные радиусы инерции (i_u, i_v)

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}} = \sqrt{\frac{92232601,57}{20386,73}} = 67,26 \text{ мм}$$

$$i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}} = \sqrt{\frac{43944196,27}{20386,73}} = 46,43 \text{ мм}$$

Пошаговый расчёт центра тяжести (подробно)

Фигура 1 – прямоугольник с основанием 20 мм и высотой 100 мм

1. Вычисление площади для фигуры 1:

Для прямоугольника площадь находится по формуле:

$$A_1 = a \times b$$

Подставляем значения основания и высоты:

$$A_1 = (20) \times (100) = 2000_{\text{мм}^2}$$

2. Вычисление центра тяжести:

Центр тяжести этой фигуры находится в её геометрическом центре.

В локальных координатах относительно центра фигуры:

$$x'_c = 0_{\text{мм}}, y'_c = 0_{\text{мм}}$$

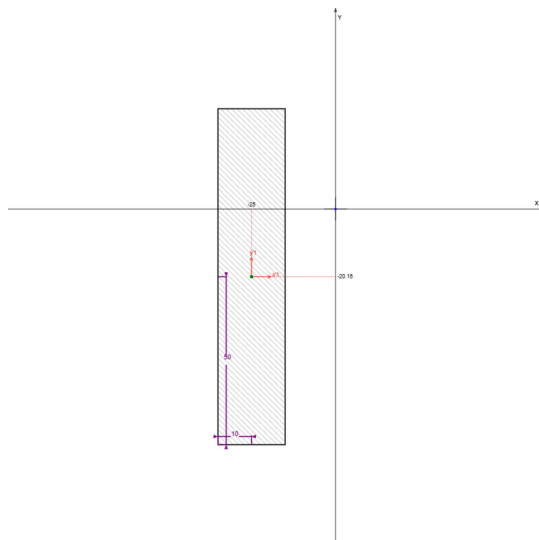
Центр фигуры расположен в точке (относительно X, Y):

$$X_0 = -25_{\text{мм}}, Y_0 = -20.16_{\text{мм}}$$

Глобальные координаты центра тяжести совпадают с координатами центра фигуры:

$$X = X_0 = -25 = -25_{\text{мм}}$$

$$Y = Y_0 = -20.16 = -20.16_{\text{мм}}$$



Фигура 2 – прямоугольник с основанием 20 мм и высотой 100 мм

2. Вычисление площади для фигуры 2:

Для прямоугольника площадь находится по формуле:

$$A_2 = a \times b$$

Подставляем значения основания и высоты:

$$A_2 = (20) \times (100) = 2000_{\text{мм}^2}$$

2. Вычисление центра тяжести:

Центр тяжести этой фигуры находится в её геометрическом центре.

В локальных координатах относительно центра фигуры:

$$x'_c = 0_{\text{мм}}, y'_c = 0_{\text{мм}}$$

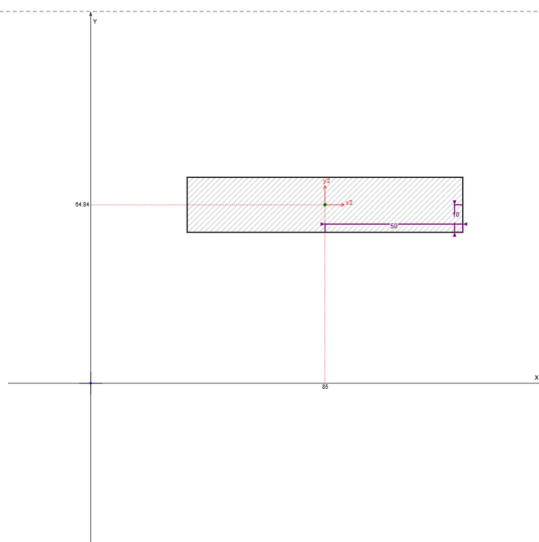
Центр фигуры расположен в точке (относительно X, Y):

$$X_0 = 85_{\text{мм}}, Y_0 = 64.84_{\text{мм}}$$

Глобальные координаты центра тяжести совпадают с координатами центра фигуры:

$$X = X_0 = 85 = 85_{\text{мм}}$$

$$Y = Y_0 = 64.84 = 64.84_{\text{мм}}$$



Фигура 3 – квадрат со стороной 100 мм

3. Вычисление площади для фигуры 3:

Для квадрата площадь находится по формуле:

$$A_3 = a^2$$

Подставляем значение стороны:

$$A_3 = (100)^2 = 10000_{\text{мм}^2}$$

2. Вычисление центра тяжести:

Центр тяжести этой фигуры находится в её геометрическом центре.

В локальных координатах относительно центра фигуры:

$$x'_c = 0_{\text{мм}}, y'_c = 0_{\text{мм}}$$

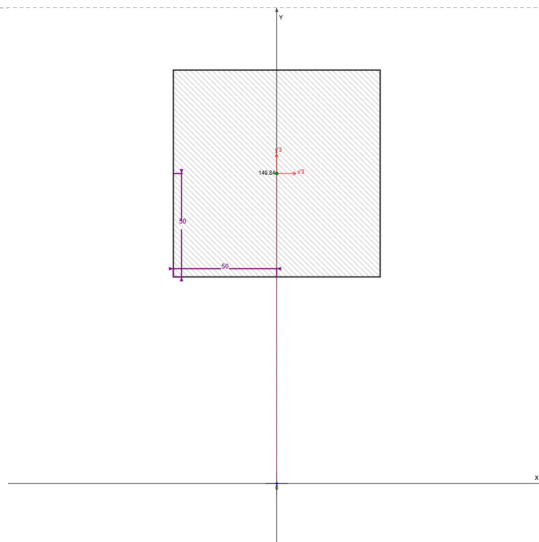
Центр фигуры расположен в точке (относительно X, Y):

$$X_0 = 0_{\text{мм}}, Y_0 = 149.84_{\text{мм}}$$

Глобальные координаты центра тяжести совпадают с координатами центра фигуры:

$$X = X_0 = 0 = 0_{\text{мм}}$$

$$Y = Y_0 = 149.84 = 149.84_{\text{мм}}$$



Фигура 4 – квадрат со стороной 70 мм

4. Вычисление площади для фигуры 4:

Для квадрата площадь находится по формуле:

$$A_4 = a^2$$

Подставляем значение стороны:

$$A_4 = (70)^2 = 4900_{\text{мм}^2}$$

2. Вычисление центра тяжести:

Центр тяжести этой фигуры находится в её геометрическом центре.

В локальных координатах относительно центра фигуры:

$$x'_c = 0_{\text{мм}}, y'_c = 0_{\text{мм}}$$

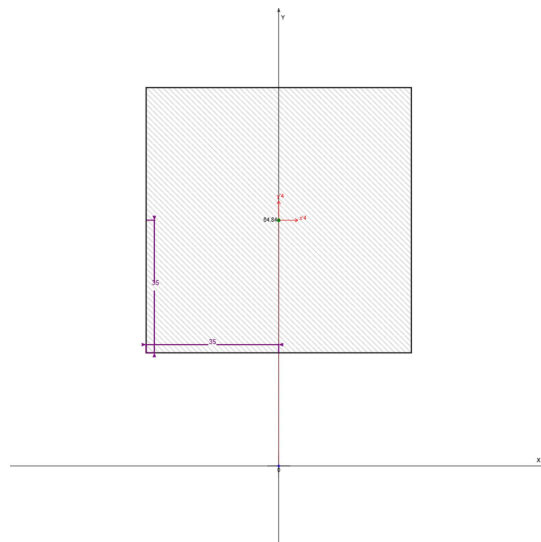
Центр фигуры расположен в точке (относительно X, Y):

$$X_0 = 0_{\text{мм}}, Y_0 = 64.84_{\text{мм}}$$

Глобальные координаты центра тяжести совпадают с координатами центра фигуры:

$$X = X_0 = 0 = 0_{\text{мм}}$$

$$Y = Y_0 = 64.84 = 64.84_{\text{мм}}$$



Фигура 5 – прямоугольник с основанием 20 мм и высотой 100 мм

5. Вычисление площади для фигуры 5:

Для прямоугольника площадь находится по формуле:

$$A_5 = a \times b$$

Подставляем значения основания и высоты:

$$A_5 = (20) \times (100) = 2000_{\text{мм}^2}$$

2. Вычисление центра тяжести:

Центр тяжести этой фигуры находится в её геометрическом центре.

В локальных координатах относительно центра фигуры:

$$x'_c = 0_{\text{мм}}, y'_c = 0_{\text{мм}}$$

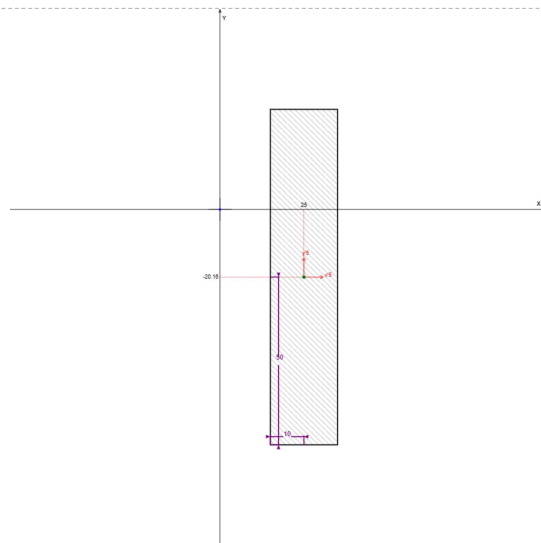
Центр фигуры расположен в точке (относительно X, Y):

$$X_0 = 25_{\text{мм}}, Y_0 = -20.16_{\text{мм}}$$

Глобальные координаты центра тяжести совпадают с координатами центра фигуры:

$$X = X_0 = 25 = 25_{\text{мм}}$$

$$Y = Y_0 = -20.16 = -20.16_{\text{мм}}$$



Фигура 6 – прямоугольник с основанием 20 мм и высотой 100 мм

6. Вычисление площади для фигуры 6:

Для прямоугольника площадь находится по формуле:

$$A_6 = a \times b$$

Подставляем значения основания и высоты:

$$A_6 = (20) \times (100) = 2000_{\text{мм}^2}$$

2. Вычисление центра тяжести:

Центр тяжести этой фигуры находится в её геометрическом центре.

В локальных координатах относительно центра фигуры:

$$x'_c = 0_{\text{мм}}, y'_c = 0_{\text{мм}}$$

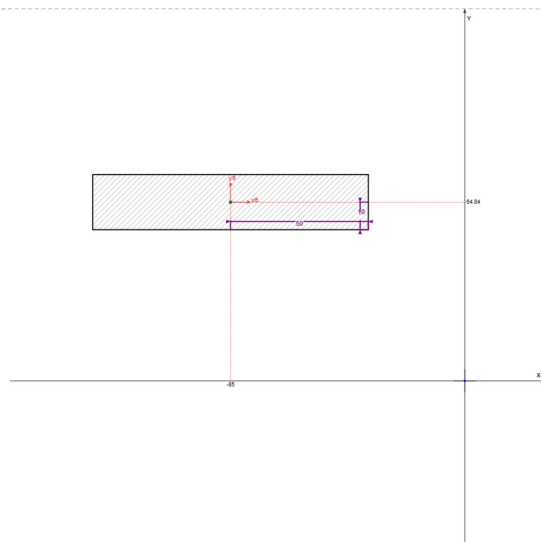
Центр фигуры расположен в точке (относительно X, Y):

$$X_0 = -85_{\text{мм}}, Y_0 = 64.84_{\text{мм}}$$

Глобальные координаты центра тяжести совпадают с координатами центра фигуры:

$$X = X_0 = -85 = -85_{\text{мм}}$$

$$Y = Y_0 = 64.84 = 64.84_{\text{мм}}$$



Фигура 7 – круг с радиусом 20 мм

7. Вычисление площади для фигуры 7:

Для круга площадь находится по формуле:

$$A_7 = \pi r^2$$

Подставляем значение радиуса:

$$A_7 = \pi \times (20)^2 \approx 1256.64_{\text{мм}^2}$$

2. Вычисление центра тяжести:

Центр тяжести этой фигуры находится в её геометрическом центре.

В локальных координатах относительно центра фигуры:

$$x'_c = 0_{\text{мм}}, y'_c = 0_{\text{мм}}$$

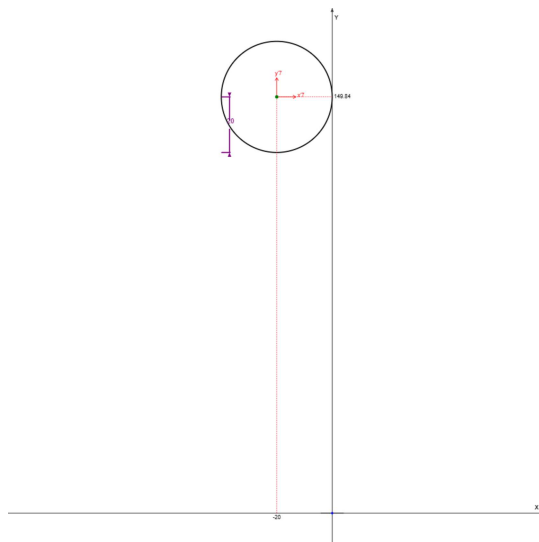
Центр фигуры расположен в точке (относительно X, Y):

$$X_0 = -20_{\text{мм}}, Y_0 = 149.84_{\text{мм}}$$

Глобальные координаты центра тяжести совпадают с координатами центра фигуры:

$$X = X_0 = -20 = -20_{\text{мм}}$$

$$Y = Y_0 = 149.84 = 149.84_{\text{мм}}$$



Фигура 8 – круг с радиусом 20 мм

8. Вычисление площади для фигуры 8:

Для круга площадь находится по формуле:

$$A_8 = \pi r^2$$

Подставляем значение радиуса:

$$A_8 = \pi \times (20)^2 \approx 1256.64_{\text{мм}^2}$$

2. Вычисление центра тяжести:

Центр тяжести этой фигуры находится в её геометрическом центре.

В локальных координатах относительно центра фигуры:

$$x'_c = 0_{\text{мм}}, y'_c = 0_{\text{мм}}$$

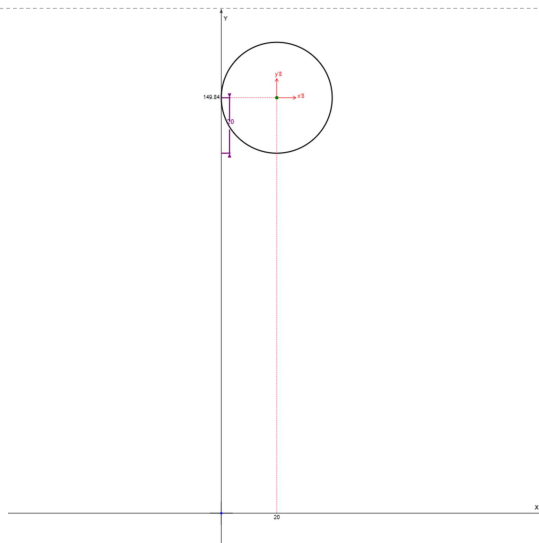
Центр фигуры расположен в точке (относительно X, Y):

$$X_0 = 20_{\text{мм}}, Y_0 = 149.84_{\text{мм}}$$

Глобальные координаты центра тяжести совпадают с координатами центра фигуры:

$$X = X_0 = 20 = 20_{\text{мм}}$$

$$Y = Y_0 = 149.84 = 149.84_{\text{мм}}$$



Итоговый расчёт

Суммарная площадь — это сумма площадей всех фигур, учитывая их знаки (если фигура является отверстием, ее площадь вычитается):

$$\sum A_i = 2000 + 2000 + 10000 + 4900 + 2000 + 2000 + (-1256.64) + (-1256.64) = 20386.73_{\text{мм}^2}$$

$$\text{Вычисляем } X_c \text{ по формуле: } X_c = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}$$

$$X_c = \frac{2000 \times (-25) + 2000 \times 85 + 10000 \times 0 + 4900 \times 0 + 2000 \times 25 + 2000 \times (-85) + (-1256.64) \times (-20) + (-1256.64) \times 20}{20386.73} = 0_{\text{мм}}$$

$$\text{Вычисляем } Y_c \text{ по формуле: } Y_c = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

$$Y_c = \frac{2000 \times (-20.16) + 2000 \times 64.84 + 10000 \times 149.84 + 4900 \times 64.84 + 2000 \times (-20.16) + 2000 \times 64.84 + (-1256.64) \times 149.84 + (-1256.64) \times 149.84}{20386.73} = 79.38_{\text{мм}}$$

Расчет геометрических характеристик сечения (подробно)

Положение главных центральных осей

Шаг 1: Расчет моментов инерции относительно центральных осей

Фигура 1 – прямоугольник

Расстояния от центроида фигуры до общего центроида:

$$a_1 = -25 - 0 = -25_{\text{мм}}$$

$$b_1 = -20.16 - 79.38 = -99.54_{\text{мм}}$$

Собственные моменты инерции (прямоугольник):

$$I_{x'_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \times 100^3}{12} = 1666666.67_{\text{мм}^4}$$

$$I_{y'_1} = \frac{hb^3}{12} = \frac{100 \times 20^3}{12} = 66666.67_{\text{мм}^4}$$

$$I_{x'y'_1} = 0_{\text{мм}^4}$$

Моменты относительно центральных осей:

$$I_{x_1} = I_{x'_1} + A_1 b_1^2 = 1666666.67 + 2000 \times (-99.54)^2 = 21482088.08_{\text{мм}^4}$$

$$I_{y_1} = I_{y'_1} + A_1 a_1^2 = 66666.67 + 2000 \times (-25)^2 = 1316666.67_{\text{мм}^4}$$

$$I_{xy_1} = I_{x'y'_1} + A_1 a_1 b_1 = 0 + 2000 \times (-25) \times (-99.54) = 4976874.2_{\text{мм}^4}$$

Фигура 2 – прямоугольник

Расстояния от центроида фигуры до общего центроида:

$$a_2 = 85 - 0 = 85_{\text{мм}}$$

$$b_2 = 64.84 - 79.38 = -14.54_{\text{мм}}$$

Собственные моменты инерции (прямоугольник):

$$I_{x'_2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \times 100^3}{12} = 1666666.67_{\text{мм}^4}$$

$$I_{y'_2} = \frac{hb^3}{12} = \frac{100 \times 20^3}{12} = 66666.67_{\text{мм}^4}$$

$$I_{x'y'_2} = 0_{\text{мм}^4}$$

Моменты после поворота на 90°:

Формулы:

$$I_{x'_2} = I_{x'_2} \cos^2 \theta + I_{y'_2} \sin^2 \theta - 2I_{x'y'_2} \sin \theta \cos \theta$$

$$I_{y'_2} = I_{x'_2} \sin^2 \theta + I_{y'_2} \cos^2 \theta + 2I_{x'y'_2} \sin \theta \cos \theta$$

$$I_{x'y'_2} = (I_{x'_2} - I_{y'_2}) \sin \theta \cos \theta + I_{x'y'_2} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

Подстановка: $\theta = 90^\circ$, $\cos \theta = 0$, $\sin \theta = 1$

$$I_{x'_2} = 1666666.67 \times 0^2 + 66666.67 \times 1^2 - 2 \times 0 \times 1 \times 0 = 66666.67_{\text{мм}^4}$$

$$I_{y'_2} = 1666666.67 \times 1^2 + 66666.67 \times 0^2 + 2 \times 0 \times 1 \times 0 = 1666666.67_{\text{мм}^4}$$

$$I_{x'y'_2} = (1666666.67 - 66666.67) \times 1 \times 0 + 0 \times (0^2 - 1^2) = 0_{\text{мм}^4}$$

Моменты относительно центральных осей:

$$I_{x_2} = I_{x'_2} + A_2 b_2^2 = 66666.67 + 2000 \times (-14.54)^2 = 489343.54_{\text{мм}^4}$$

$$I_{y_2} = I_{y'_2} + A_2 a_2^2 = 1666666.67 + 2000 \times (85)^2 = 16116666.67_{\text{мм}^4}$$

$$I_{xy_2} = I_{x'y'_2} + A_2 a_2 b_2 = 0 + 2000 \times (85) \times (-14.54) = -2471372.27_{\text{мм}^4}$$

Фигура 3 – квадрат

Расстояния от центроида фигуры до общего центроида:

$$a_3 = 0 - 0 = 0_{\text{мм}}$$

$$b_3 = 149.84 - 79.38 = 70.46_{\text{мм}}$$

Собственные моменты инерции (квадрат):

$$I_{x'_3} = \frac{a^4}{12} = \frac{100^4}{12} = 8333333.33 \text{ мм}^4$$

$$I_{y'_3} = \frac{a^4}{12} = \frac{100^4}{12} = 8333333.33 \text{ мм}^4$$

$$I_{x'y'_3} = 0 \text{ мм}^4$$

Моменты относительно центральных осей:

$$I_{x_3} = I_{x'_3} + A_3 b_3^2 = 8333333.33 + 10000 \times (70.46)^2 = 57982995.06 \text{ мм}^4$$

$$I_{y_3} = I_{y'_3} + A_3 a_3^2 = 8333333.33 + 10000 \times (0)^2 = 8333333.33 \text{ мм}^4$$

$$I_{xy3} = I_{x'y'_3} + A_3 a_3 b_3 = 0 + 10000 \times (0) \times (70.46) = 0 \text{ мм}^4$$

Фигура 4 – квадрат

Расстояния от центра тяжести фигуры до общего центра тяжести:

$$a_4 = 0 - 0 = 0 \text{ мм}$$

$$b_4 = 64.84 - 79.38 = -14.54 \text{ мм}$$

Собственные моменты инерции (квадрат):

$$I_{x'_4} = \frac{a^4}{12} = \frac{70^4}{12} = 2000833.33 \text{ мм}^4$$

$$I_{y'_4} = \frac{a^4}{12} = \frac{70^4}{12} = 2000833.33 \text{ мм}^4$$

$$I_{x'y'_4} = 0 \text{ мм}^4$$

Моменты относительно центральных осей:

$$I_{x_4} = I_{x'_4} + A_4 b_4^2 = 2000833.33 + 4900 \times (-14.54)^2 = 3036391.68 \text{ мм}^4$$

$$I_{y_4} = I_{y'_4} + A_4 a_4^2 = 2000833.33 + 4900 \times (0)^2 = 2000833.33 \text{ мм}^4$$

$$I_{xy4} = I_{x'y'_4} + A_4 a_4 b_4 = 0 + 4900 \times (0) \times (-14.54) = 0 \text{ мм}^4$$

Фигура 5 – прямоугольник

Расстояния от центра тяжести фигуры до общего центра тяжести:

$$a_5 = 25 - 0 = 25 \text{ мм}$$

$$b_5 = -20.16 - 79.38 = -99.54 \text{ мм}$$

Собственные моменты инерции (прямоугольник):

$$I_{x'_5} = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \times 100^3}{12} = 1666666.67 \text{ мм}^4$$

$$I_{y'_5} = \frac{hb^3}{12} = \frac{100 \times 20^3}{12} = 66666.67 \text{ мм}^4$$

$$I_{x'y'_5} = 0 \text{ мм}^4$$

Моменты относительно центральных осей:

$$I_{x_5} = I_{x'_5} + A_5 b_5^2 = 1666666.67 + 2000 \times (-99.54)^2 = 21482088.08 \text{ мм}^4$$

$$I_{y_5} = I_{y'_5} + A_5 a_5^2 = 66666.67 + 2000 \times (25)^2 = 1316666.67 \text{ мм}^4$$

$$I_{xy5} = I_{x'y'_5} + A_5 a_5 b_5 = 0 + 2000 \times (25) \times (-99.54) = -4976874.2 \text{ мм}^4$$

Фигура 6 – прямоугольник

Расстояния от центра тяжести фигуры до общего центра тяжести:

$$a_6 = -85 - 0 = -85 \text{ мм}$$

$$b_6 = 64.84 - 79.38 = -14.54 \text{ мм}$$

Собственные моменты инерции (прямоугольник):

$$I_{x'_6} = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \times 100^3}{12} = 1666666.67 \text{ мм}^4$$

$$I_{y'_6} = \frac{hb^3}{12} = \frac{100 \times 20^3}{12} = 66666.67 \text{ мм}^4$$

$$I_{x'y'_6} = 0 \text{ мм}^4$$

Моменты после поворота на 90°:

Формулы:

$$I_{x''6} = I_{x'_6} \cos^2 \theta + I_{y'_6} \sin^2 \theta - 2I_{x'y'_6} \sin \theta \cos \theta$$

$$I_{y'6} = I_{x'6} \sin^2 \theta + I_{y'6} \cos^2 \theta + 2I_{xy'6} \sin \theta \cos \theta$$

$$I_{x'y'6} = (I_{x'6} - I_{y'6}) \sin \theta \cos \theta + I_{xy'6} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

Подстановка: $\theta = 90^\circ$, $\cos \theta = 0$, $\sin \theta = 1$

$$I_{x'6} = 1666666.67 \times 0^2 + 66666.67 \times 1^2 - 2 \times 0 \times 1 \times 0 = 66666.67_{\text{мм}}^4$$

$$I_{y'6} = 1666666.67 \times 1^2 + 66666.67 \times 0^2 + 2 \times 0 \times 1 \times 0 = 1666666.67_{\text{мм}}^4$$

$$I_{x'y'6} = (1666666.67 - 66666.67) \times 1 \times 0 + 0 \times (0^2 - 1^2) = 0_{\text{мм}}^4$$

Моменты относительно центральных осей:

$$I_{x_6} = I_{x'6} + A_6 b_6^2 = 66666.67 + 2000 \times (-14.54)^2 = 489343.54_{\text{мм}}^4$$

$$I_{y_6} = I_{y'6} + A_6 a_6^2 = 1666666.67 + 2000 \times (-85)^2 = 16116666.67_{\text{мм}}^4$$

$$I_{xy_6} = I_{x'y'6} + A_6 a_6 b_6 = 0 + 2000 \times (-85) \times (-14.54) = 2471372.27_{\text{мм}}^4$$

Фигура 7 – круг

Расстояния от центра тяжести фигуры до общего центра тяжести:

$$a_7 = -20 - 0 = -20_{\text{мм}}$$

$$b_7 = 149.84 - 79.38 = 70.46_{\text{мм}}$$

Собственные моменты инерции (круг):

$$I_{x'_7} = I_{y'_7} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi \times 20^4}{4} = 125663.71_{\text{мм}}^4$$

$$I_{x'y'_7} = 0_{\text{мм}}^4$$

Моменты относительно центральных осей:

$$I_{x_7} = I_{x'_7} + A_7 b_7^2 = 125663.71 + 1256.64 \times (70.46)^2 = 6364824.21_{\text{мм}}^4$$

$$I_{y_7} = I_{y'_7} + A_7 a_7^2 = 125663.71 + 1256.64 \times (-20)^2 = 628318.53_{\text{мм}}^4$$

$$I_{xy_7} = I_{x'y'_7} + A_7 a_7 b_7 = 0 + 1256.64 \times (-20) \times (70.46) = -1770916.18_{\text{мм}}^4$$

Фигура 8 – круг

Расстояния от центра тяжести фигуры до общего центра тяжести:

$$a_8 = 20 - 0 = 20_{\text{мм}}$$

$$b_8 = 149.84 - 79.38 = 70.46_{\text{мм}}$$

Собственные моменты инерции (круг):

$$I_{x'_8} = I_{y'_8} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi \times 20^4}{4} = 125663.71_{\text{мм}}^4$$

$$I_{x'y'_8} = 0_{\text{мм}}^4$$

Моменты относительно центральных осей:

$$I_{x_8} = I_{x'_8} + A_8 b_8^2 = 125663.71 + 1256.64 \times (70.46)^2 = 6364824.21_{\text{мм}}^4$$

$$I_{y_8} = I_{y'_8} + A_8 a_8^2 = 125663.71 + 1256.64 \times (20)^2 = 628318.53_{\text{мм}}^4$$

$$I_{xy_8} = I_{x'y'_8} + A_8 a_8 b_8 = 0 + 1256.64 \times (20) \times (70.46) = 1770916.18_{\text{мм}}^4$$

Итоговые моменты инерции сечения:

$$I_x = I_{x_1} + I_{x_2} + I_{x_3} + I_{x_4} + I_{x_5} + I_{x_6} - I_{x_7} - I_{x_8} = 21482088.08 + 489343.54 + 57982995.06 + 3036391.68 + 21482088.08 + 489343.54 - 6364824.21 - 6364824.21 =$$

$$I_y = I_{y_{\text{index}+1}} + I_{y_{\text{index}+1}} + I_{y_{\text{index}+1}} + I_{y_{\text{index}+1}} + I_{y_{\text{index}+1}} + I_{y_{\text{index}+1}} - I_{y_{\text{index}+1}} - I_{y_{\text{index}+1}} = 1316666.67 + 16116666.67 + 8333333.33 + 2000833.33 + 1316666.67 + 16116666.67 -$$

$$I_{xy} = I_{xy_{\text{index}+1}} + I_{xy_{\text{index}+1}} + I_{xy_{\text{index}+1}} + I_{xy_{\text{index}+1}} + I_{xy_{\text{index}+1}} + I_{xy_{\text{index}+1}} - I_{xy_{\text{index}+1}} - I_{xy_{\text{index}+1}} = 4976874.2 + (-2471372.27) + 0 + 0 + (-4976874.2) + 2471372.27 -$$

Шаг 2: Определение главных осей и моментов инерции

Угол наклона главных осей:

Центробежный момент $I_{xy} \approx 0$. Оси x_C, y_C являются главными.

Угол $\alpha = -0^\circ$ выбран так, чтобы ось U соответствовала моменту инерции $I_u = 92232601.57 \text{ мм}^4$ и угол лежал в диапазоне $[-45^\circ, 45^\circ]$.

Главные моменты инерции:

Формула расчета:

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Подстановка значений:

$$I_{1,2} = \frac{92232601.57 + 43944196.27}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{92232601.57 - 43944196.27}{2}\right)^2 + (0)^2}$$

Расчёт:

$$I_u = 92232601.57 \text{ мм}^4$$

(момент относительно оси U)

$$I_v = 43944196.27 \text{ мм}^4$$

(момент относительно оси V, перпендикулярной U)

Максимальный главный момент инерции:

$$I_{\max} = 92232601.57 \text{ мм}^4$$

Минимальный главный момент инерции:

$$I_{\min} = 43944196.27 \text{ мм}^4$$

Проверка инвариантности суммы моментов

Сумма осевых моментов инерции не должна изменяться при повороте осей. Проверим равенство:

$$\begin{aligned} I_u + I_v &= I_x + I_y \\ 92232601.57 + 43944196.27 &= 92232601.57 + 43944196.27 \\ 136176797.84 &= 136176797.84 \end{aligned}$$

Равенство выполняется, расчет верен.

Шаг 3: Расчет моментов сопротивления сечения

Формулы:

$$W_x = \frac{I_x}{|y_{\max}|}, \quad W_y = \frac{I_y}{|x_{\max}|}$$

Где I_x, I_y — моменты инерции сечения

$x_{\max}, y_{\max}$ — максимальные по модулю координаты точек сечения относительно центральных осей X, Y.

Найдем максимальные расстояния от центральных осей, используя координаты точек сечения (x, y) и координаты общего центраоида $x_c = 0, y_c = 79.38$:

Максимальные расстояния от центральных осей:

$$|x_{\max}| = |x - x_c| = |135 - 0| = |135| = 135 \text{ мм}$$

$$|y_{\max}| = |y - y_c| = |-70.16 - 79.38| = |-149.54| = 149.54 \text{ мм}$$

Осевые моменты сопротивления:

$$W_x = \frac{I_x}{|y_{\max}|} = \frac{92232601.57}{149.54} = 616785.83 \text{ мм}^3$$

$$W_y = \frac{I_y}{|x_{\max}|} = \frac{43944196.27}{135} = 325512.56 \text{ мм}^3$$

Шаг 4: Расчет главных моментов сопротивления W_u, W_v и главных радиусов инерции

$$|V_{\max}| = \max_i |-(x_i - x_c) \sin \alpha + (y_i - y_c) \cos \alpha| = | -(-35 - 0) \sin(-0^\circ) + (-70.16 - 79.38) \cos(-0^\circ) | = 149.54 \text{ мм}$$

$$|U_{\max}| = \max_i |(x_i - x_c) \cos \alpha + (y_i - y_c) \sin \alpha| = | (135 - 0) \cos(-0^\circ) + (54.84 - 79.38) \sin(-0^\circ) | = 135 \text{ мм}$$

Где x_c и y_c — координаты центра тяжести (центраоида) сечения.

и (x_i, y_i) — координаты крайних точек сечения, относительно которых ищутся максимальные отклонения вдоль повернутых осей.

$$W_U = \frac{I_U}{|V_{\max}|} = \frac{92232601.57}{149.54} = 616785.83 \text{ мм}^3,$$

$$W_V = \frac{I_V}{|U_{\max}|} = \frac{43944196.27}{135} = 325512.56 \text{ мм}^3.$$

$$i_U = \sqrt{\frac{I_U}{A}} = \sqrt{\frac{92232601.57}{20386.73}} = 67.26 \text{ мм},$$

$$i_V = \sqrt{\frac{I_V}{A}} = \sqrt{\frac{43944196.27}{20386.73}} = 46.43 \text{ мм}.$$