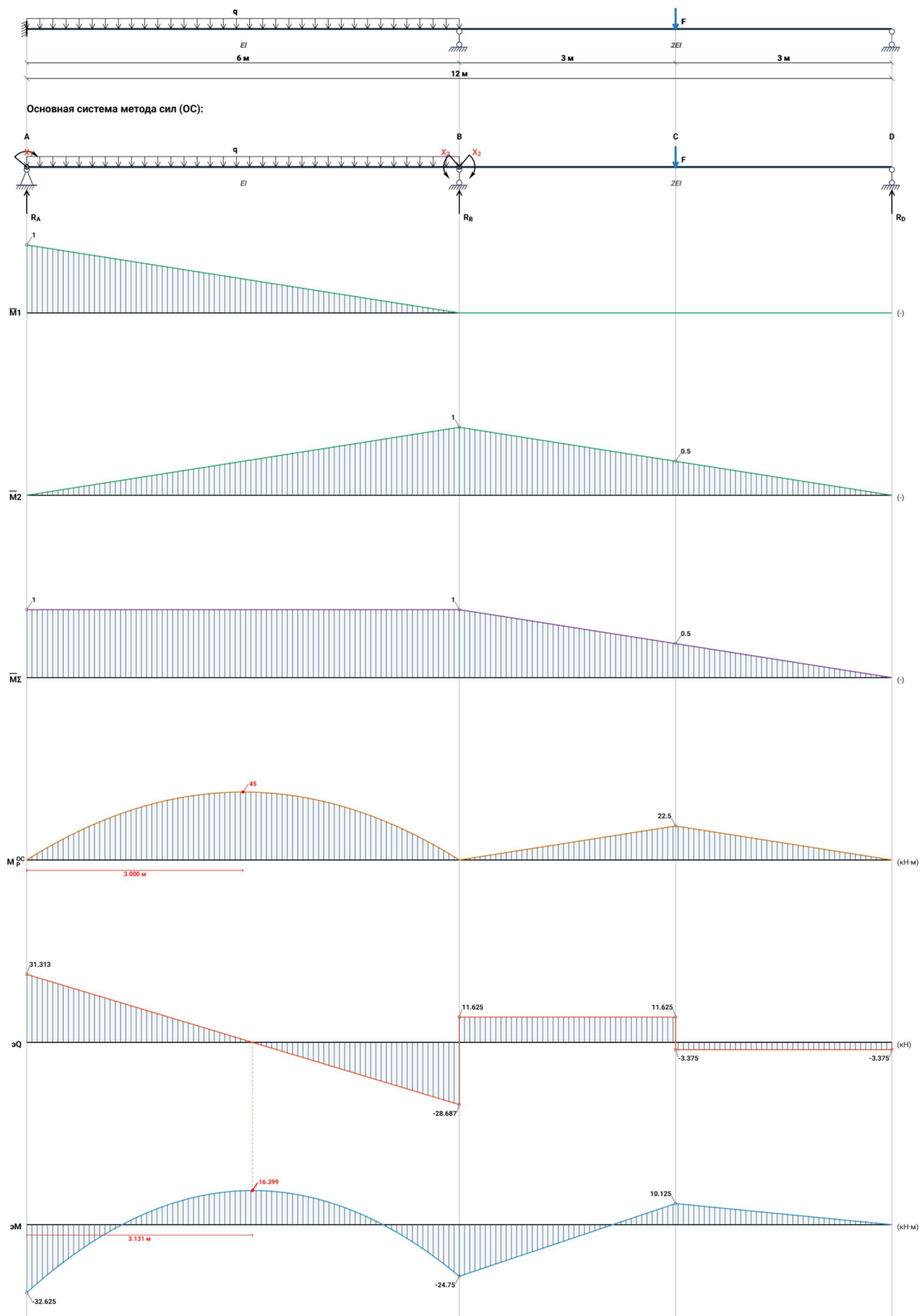




1. Определение степени статической неопределимости

$$n = C_o - 3 = 5 - 3 = 2$$

где $C_o = 5$ – количество реакций опор; 3 – уравнения статики.

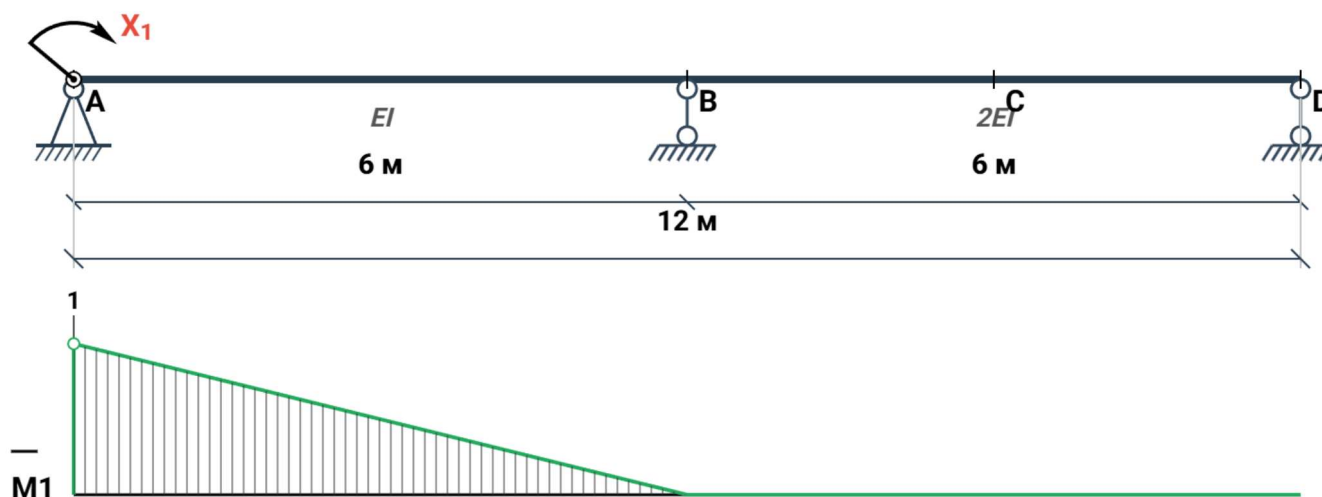
2. Составление канонических уравнений

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

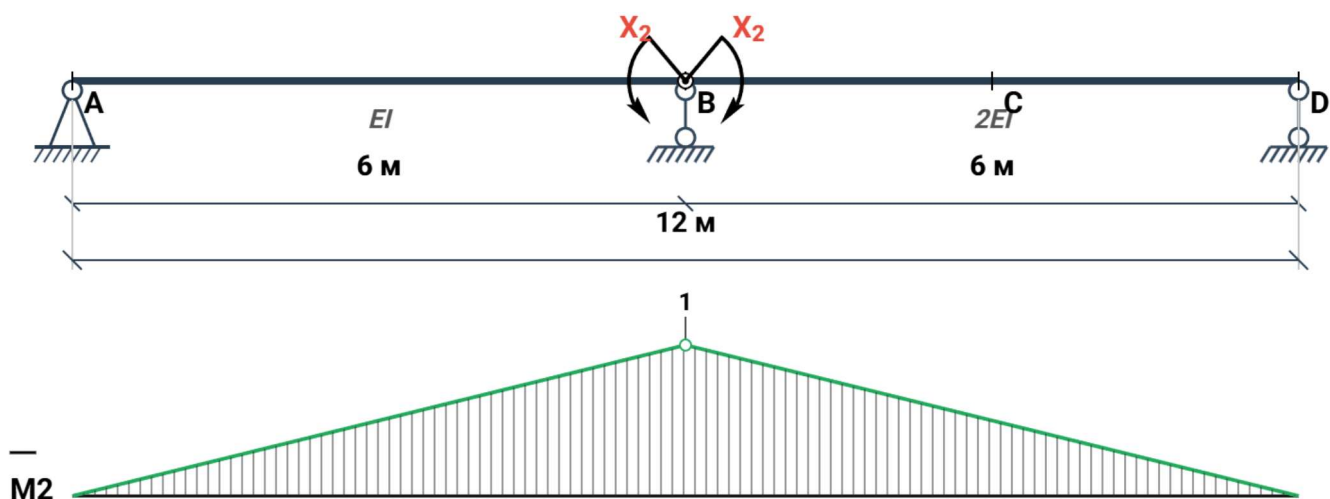
3. Построение единичных эпюр ($\overline{M}_i$)

В основной системе отбрасываем лишние связи и прикладываем единичные моменты $X_i = 1$. Строим эпюры моментов для каждого случая.

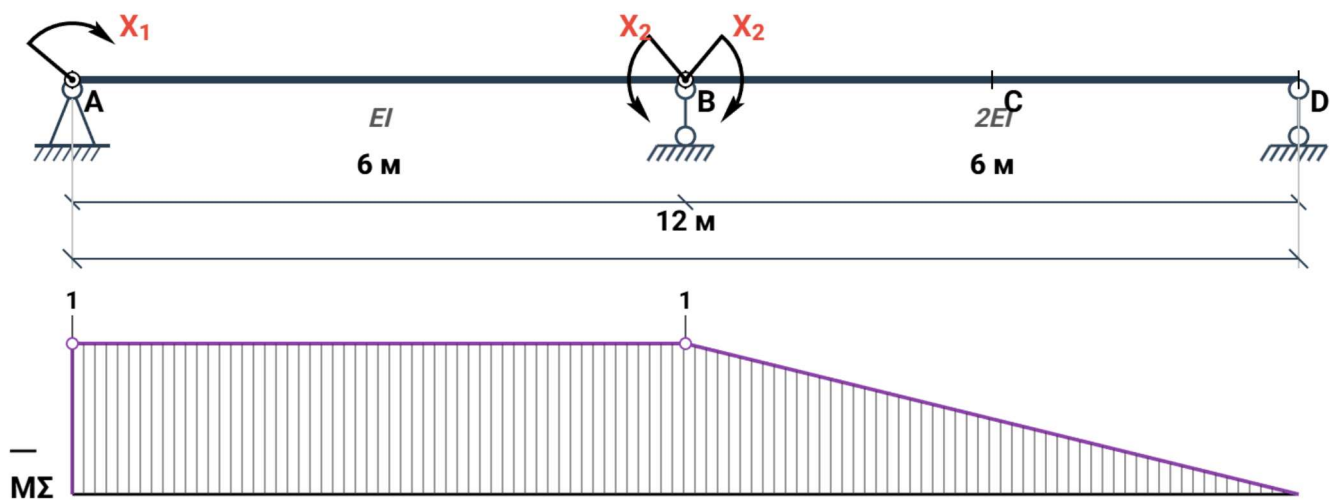
Состояние $X_1 = 1$



Состояние $X_2 = 1$



Суммарная единичная эпюра $\overline{M}_\Sigma$



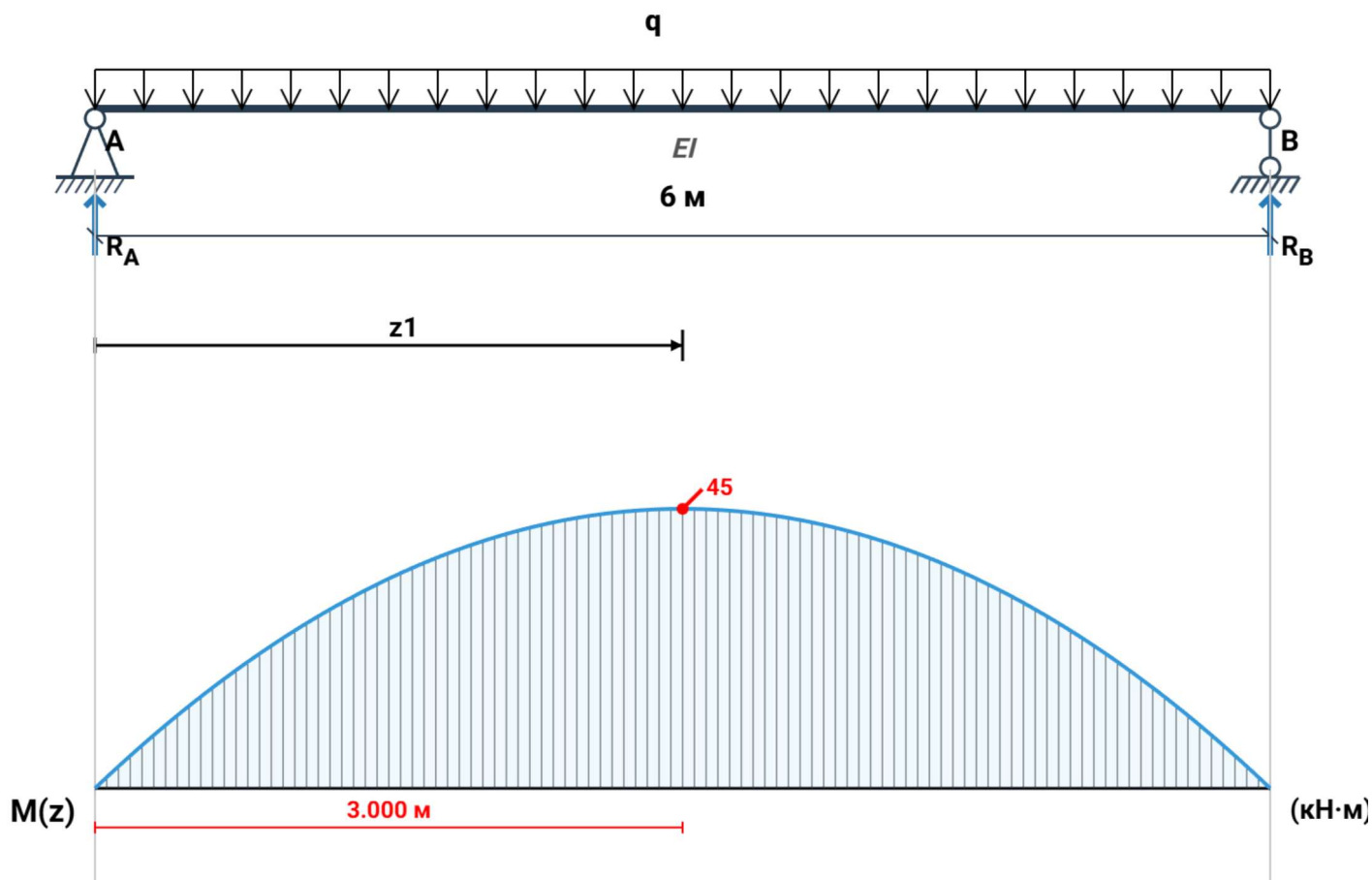
3. Построение грузовой эпюры M_p^{OC}

Для построения грузовой эпюры M_p^{OC} основная система расчленяется на ряд простых балок. Рассмотрим каждую балку в отдельности:

Балка А-В (Участок z: 0-6м)

Дано:

$$q = 10 \text{ кН/м}, M = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$$



Расчет реакций опор:

Сумма моментов всех сил относительно точки В должна равняться нулю:

$$\sum M_B = -R_A(6) + q \cdot (6) \cdot (3)$$

$$= -6R_A + 10 \cdot (6) \cdot (3)$$

$$= -6R_A + 180$$

$$= -6R_A + 180 = 0 \Rightarrow$$

$$R_A = \frac{180}{6} = 30 \text{ кН}$$

Сумма моментов всех сил относительно точки А должна равняться нулю:

$$\sum M_A = R_B(6) - q \cdot (6) \cdot (3)$$

$$= 6R_B - 10 \cdot (6) \cdot (3)$$

$$= 6R_B - 180$$

$$= 6R_B - 180 = 0 \Rightarrow$$

$$R_B = \frac{180}{6} = 30 \text{ кН}$$

Проверка: сумма проекций всех сил на вертикальную ось должна равняться нулю:

$$\sum Y = R_A + R_B - q \cdot 6 = 0$$

$$= 30 + 30 - 60 = 0$$

$$60 - 60 = 0 \approx 0$$

Проверка пройдена

Расчет изгибающих моментов $M(z)$:

Участок 1 ($0 \text{ м} \leq z \leq 6 \text{ м}$):

$$M(z) = R_A \cdot z - q \cdot \frac{z^2}{2}$$

$$M(0) = 0.000 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M(6) = 0.000 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Расчет экстремума момента:

Так как на участке действует распределенная нагрузка, эпюра моментов — парабола.

Экстремум находится в точке, где поперечная сила $Q(z) = 0$.

$$Q(z) = Q_{нач} - q \cdot z = 30 - 10 \cdot z = 0$$

$$z = \frac{|Q_{нач}|}{|q|} = \frac{30}{10} = 3 \text{ м (от начала участка)}$$

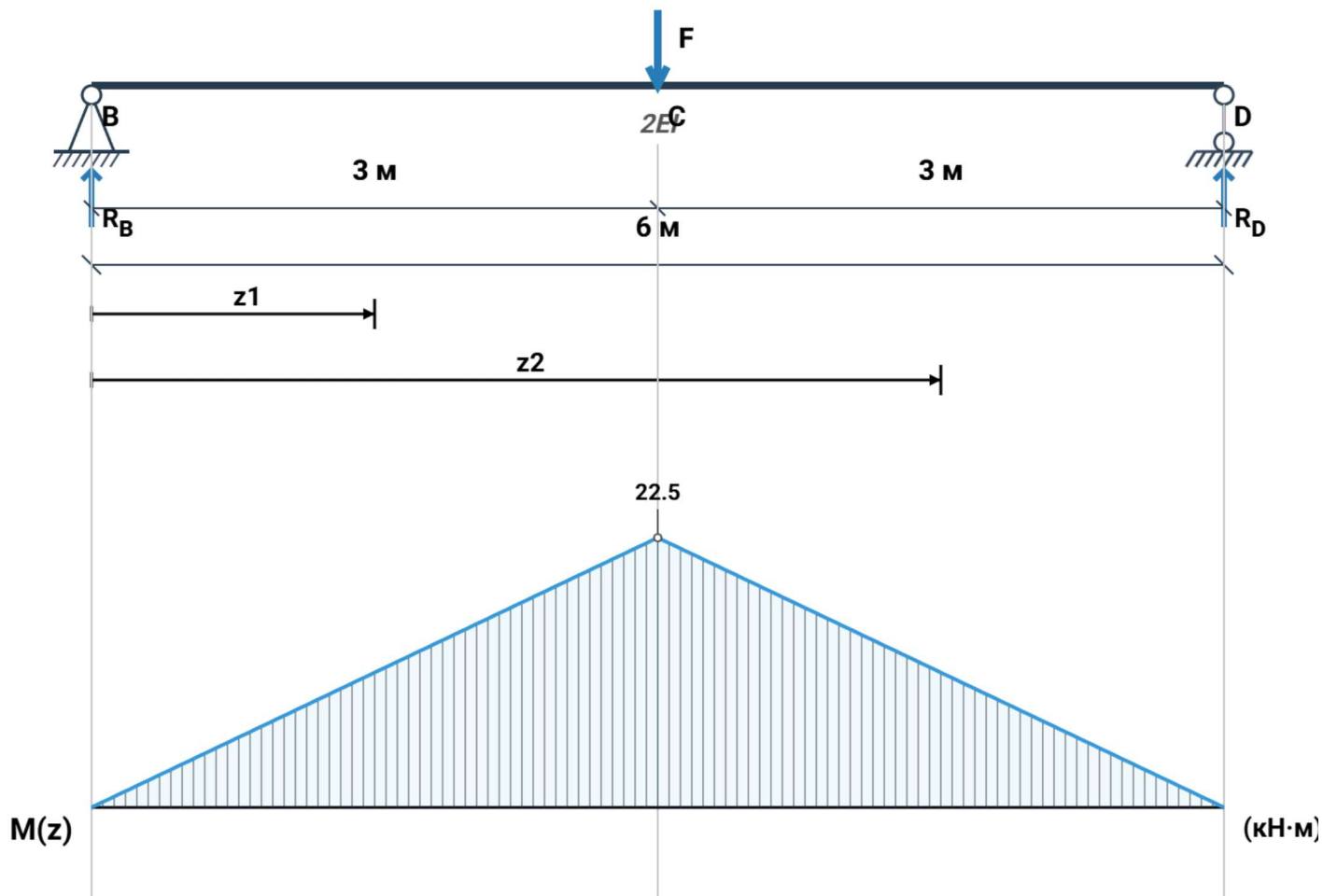
Вычисляем максимальный момент в этой точке:

$$M_{max} = M(3) = 45 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Балка B-D (Участок z : 6-12м)

Дано:

$$F = 15 \text{ кН}$$



Расчет реакций опор:

Сумма моментов всех сил относительно точки D должна равняться нулю:

$$\sum M_D = -R_B(6) + F \cdot (3)$$

$$= -6R_B + 15 \cdot (3)$$

$$= -6R_B + 45$$

$$= -6R_B + 45 = 0 \Rightarrow$$

$$R_B = \frac{45}{6} = 7.50 \text{ кН}$$

Сумма моментов всех сил относительно точки B должна равняться нулю:

$$\sum M_B = R_D(6) - F \cdot (3)$$

$$= 6R_D - 15 \cdot (3)$$

$$= 6R_D - 45$$

$$= 6R_D - 45 = 0 \Rightarrow$$

$$R_D = \frac{45}{6} = 7.50 \text{ кН}$$

Проверка: сумма проекций всех сил на вертикальную ось должна равняться нулю:

$$\sum Y = R_B + R_D - F = 0$$

$$= 7.50 + 7.50 - 15 = 0$$

$$15 - 15 = 0 \approx 0$$

Проверка пройдена

Расчет изгибающих моментов $M(z)$:

Участок 1 ($0 \text{ м} \leq z \leq 3 \text{ м}$):

$$M(z) = R_B \cdot z$$

$$M(0) = 0.000 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M(3) = 22.500 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Участок 2 ($3 \text{ м} \leq z \leq 6 \text{ м}$):

$$M(z) = R_B \cdot z - F \cdot (z - 3 \text{ м})$$

$$M(3) = 22.500 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M(6) = 0.000 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

4. Нахождение коэффициентов канонического уравнения

Коэффициенты находятся перемножением эпюр по формуле Симпсона:

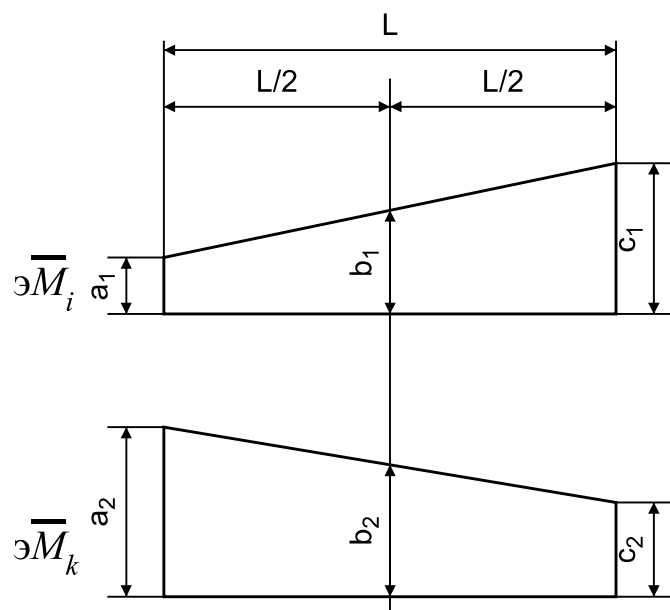
$$\delta_{ik} = \overline{M}_i \cdot \overline{M}_k = \frac{l}{6EI} (a_1 \cdot a_2 + 4 \cdot b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2),$$

где l – длина участка;

a_1, a_2 – значение изгибающего момента на эпюре в ее начале;

b_1, b_2 – значение изгибающего момента на эпюре в ее середине;

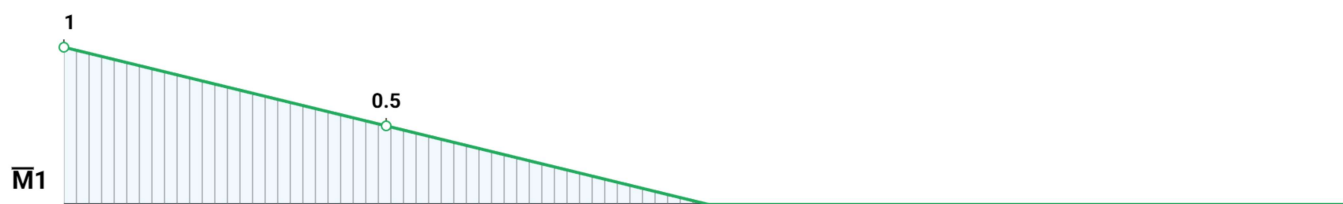
c_1, c_2 – значение изгибающего момента на эпюре в ее конце.



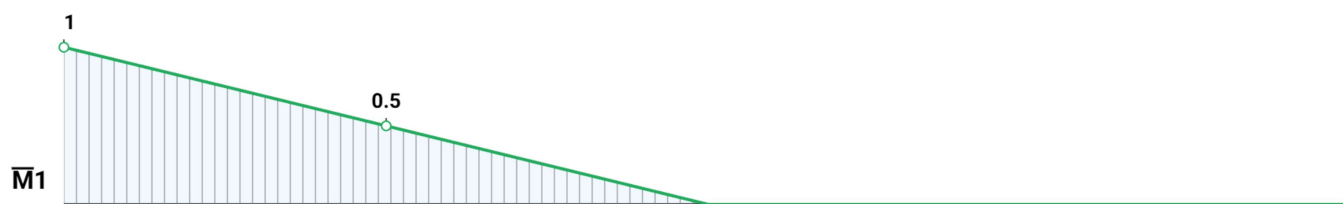
Единичные коэффициенты (δ_{ik}):



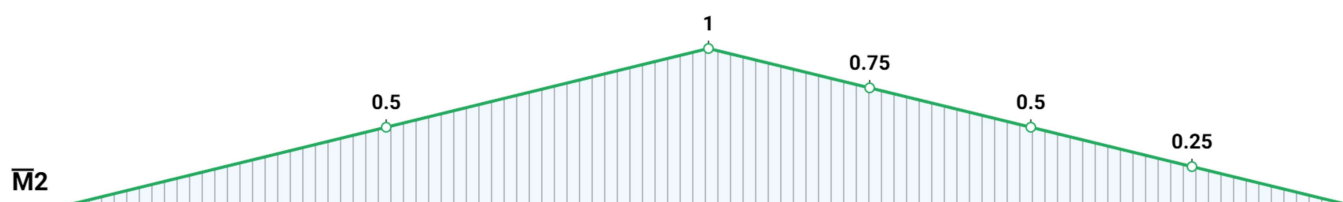
x



$$\delta_{11} = \overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1 = \frac{6}{6EI} (1 \cdot 1 + 4 \cdot 0.5 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0) = \frac{2}{EI} \text{ m}$$

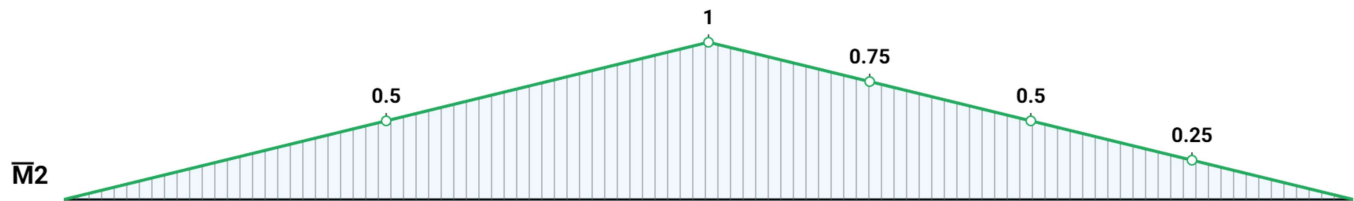


×

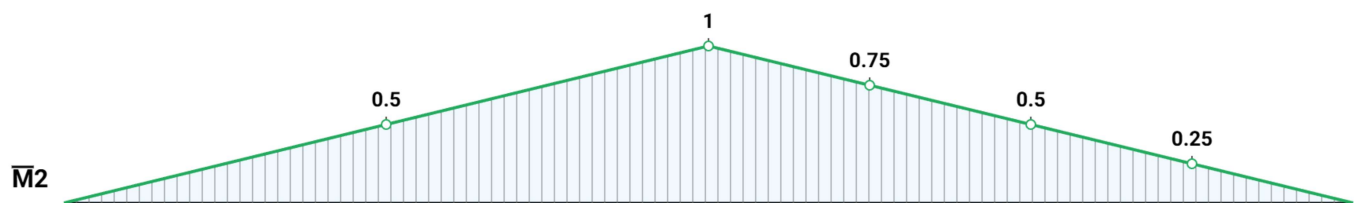


$$\delta_{12} = \delta_{21} = \overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2 = \frac{6}{6EI} (1 \cdot 0 + 4 \cdot 0.5 \cdot 0.5 + 0 \cdot 1) + \frac{3}{6 \cdot 2EI} (0 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 0.75 + 0 \cdot 0.5) +$$

$$+ \frac{3}{6 \cdot 2EI} (0 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0 \cdot 0.25 + 0 \cdot 0) = \frac{1}{EI} \text{ м}$$



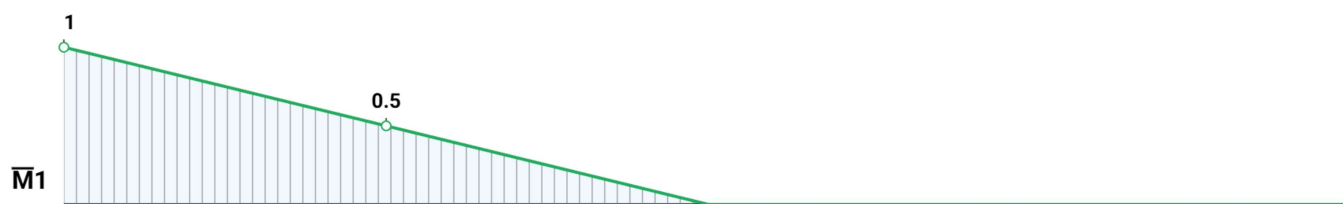
×



$$\delta_{22} = \overline{M}_2 \cdot \overline{M}_2 = \frac{6}{6EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 0.5 \cdot 0.5 + 1 \cdot 1) + \frac{3}{6 \cdot 2EI} (1 \cdot 1 + 4 \cdot 0.75 \cdot 0.75 + 0.5 \cdot 0.5) +$$

$$+ \frac{3}{6 \cdot 2EI} (0.5 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.25 \cdot 0.25 + 0 \cdot 0) = \frac{3}{EI} \text{ м}$$

Грузовые коэффициенты (Δ_{ip}):

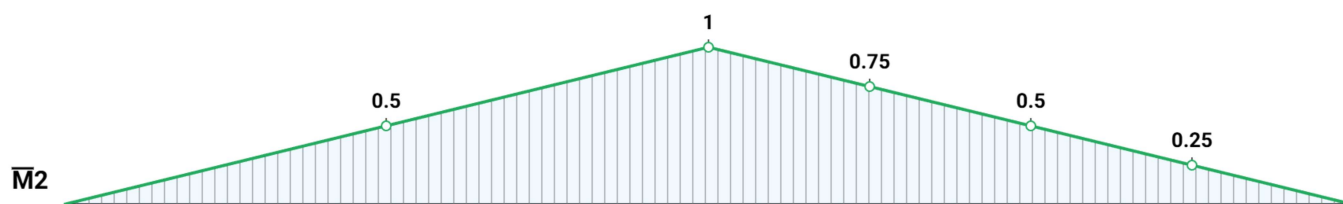


×

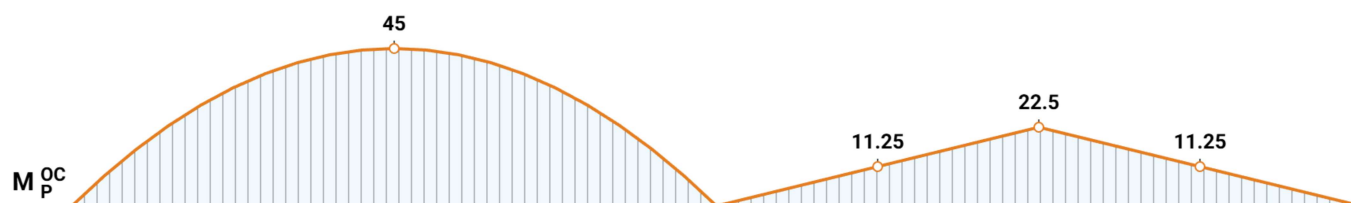


$$\Delta_{1p} = \overline{M}_1 \cdot M_p^{oc} = \frac{6}{6EI} (1 \cdot 0 + 4 \cdot 0.5 \cdot 45 + 0 \cdot 0) + \frac{3}{6 \cdot 2EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \cdot 11.25 + 0 \cdot 22.5) +$$

$$+ \frac{3}{6 \cdot 2EI} (0 \cdot 22.5 + 4 \cdot 0 \cdot 11.25 + 0 \cdot 0) = \frac{90}{EI} \text{ кН} \cdot \text{м}^2$$



×

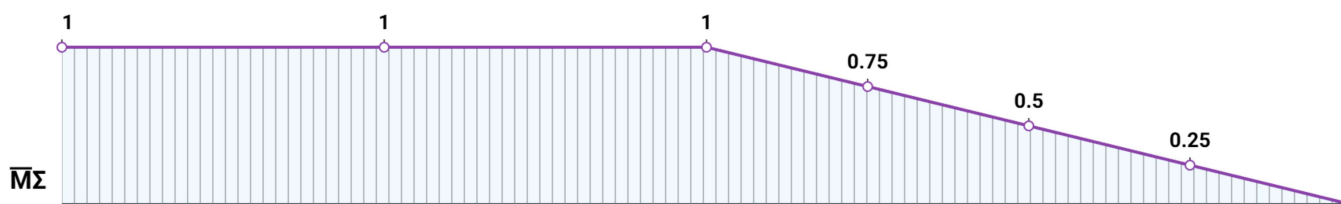


$$\Delta_{2p} = \overline{M}_2 \cdot M_p^{oc} = \frac{6}{6EI} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 0.5 \cdot 45 + 1 \cdot 0) + \frac{3}{6 \cdot 2EI} (1 \cdot 0 + 4 \cdot 0.75 \cdot 11.25 + 0.5 \cdot 22.5) + \frac{3}{6 \cdot 2EI} (0.5 \cdot 22.5 + 4 \cdot 0.25 \cdot 11.25 + 0 \cdot 0) = \frac{106.875}{EI} \text{ кН} \cdot \text{м}^2$$

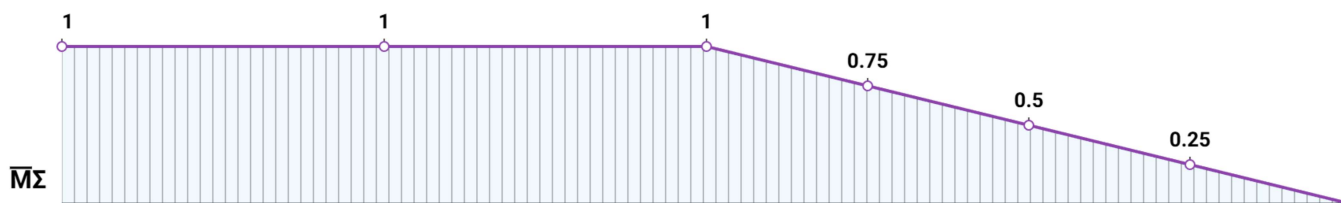
Проверка коэффициентов:

Для контроля правильности вычислений выполняем суммарную проверку (построчную и универсальную).

а) Проверка единичных коэффициентов:



×



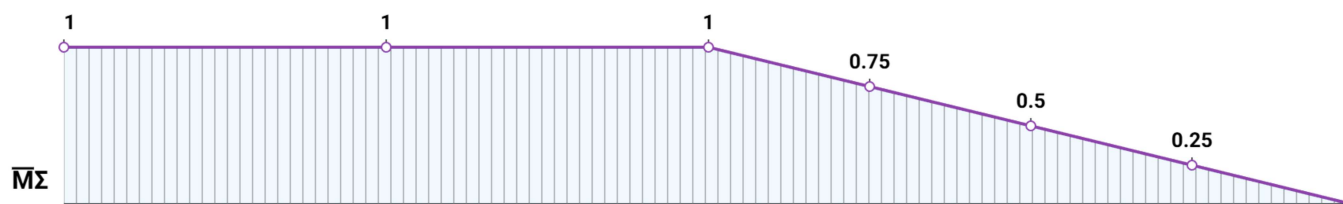
$$\sum \delta_{ik} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{7}{EI} \text{ м}$$

Перемножение суммарной единичной эпюры саму на себя:

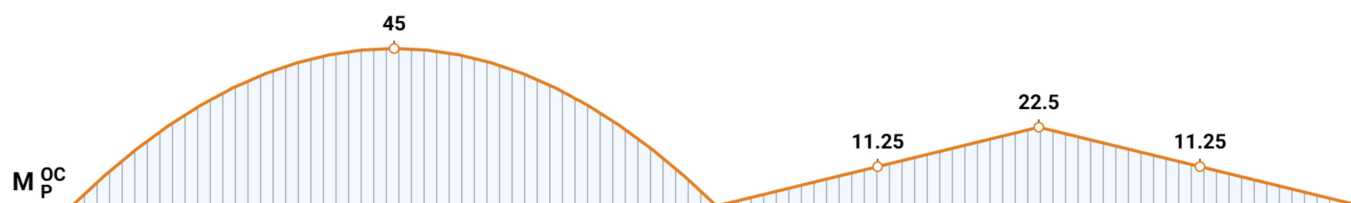
$$\begin{aligned} \overline{M}_\Sigma \cdot \overline{M}_\Sigma &= \int \frac{(\sum \overline{M}_i)^2}{EI} dz = \frac{6}{6EI} (1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + \frac{3}{6 \cdot 2EI} (1 \cdot 1 + 4 \cdot 0.75 \cdot 0.75 + 0.5 \cdot 0.5) + \\ &+ \frac{3}{6 \cdot 2EI} (0.5 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.25 \cdot 0.25 + 0 \cdot 0) = \frac{7}{EI} \text{ м} \end{aligned}$$

$$\text{Результат: } \frac{7}{EI} \approx \frac{7}{EI} \Rightarrow \text{проверка сошлась}$$

б) Проверка грузовых коэффициентов:



×



$$\sum \Delta_{ip} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} = \frac{196.875}{EI} \text{ кН} \cdot \text{м}^2$$

Перемножение суммарной единичной эпюры на грузовую:

$$\begin{aligned} \overline{M}_{\Sigma} \cdot M_p^{oc} &= \int \frac{\overline{M}_{\Sigma} \cdot M_p^{oc}}{EI} dz = \frac{6}{6EI} (1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 45 + 1 \cdot 0) + \frac{3}{6 \cdot 2EI} (1 \cdot 0 + 4 \cdot 0.75 \cdot 11.25 + 0.5 \cdot 22.5) + \\ &+ \frac{3}{6 \cdot 2EI} (0.5 \cdot 22.5 + 4 \cdot 0.25 \cdot 11.25 + 0 \cdot 0) = \frac{196.875}{EI} \text{ кН} \cdot \text{м}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Результат: } \frac{196.875}{EI} \approx \frac{196.875}{EI} \Rightarrow \text{проверка сошлась}$$

5. Нахождение X_1 и X_2

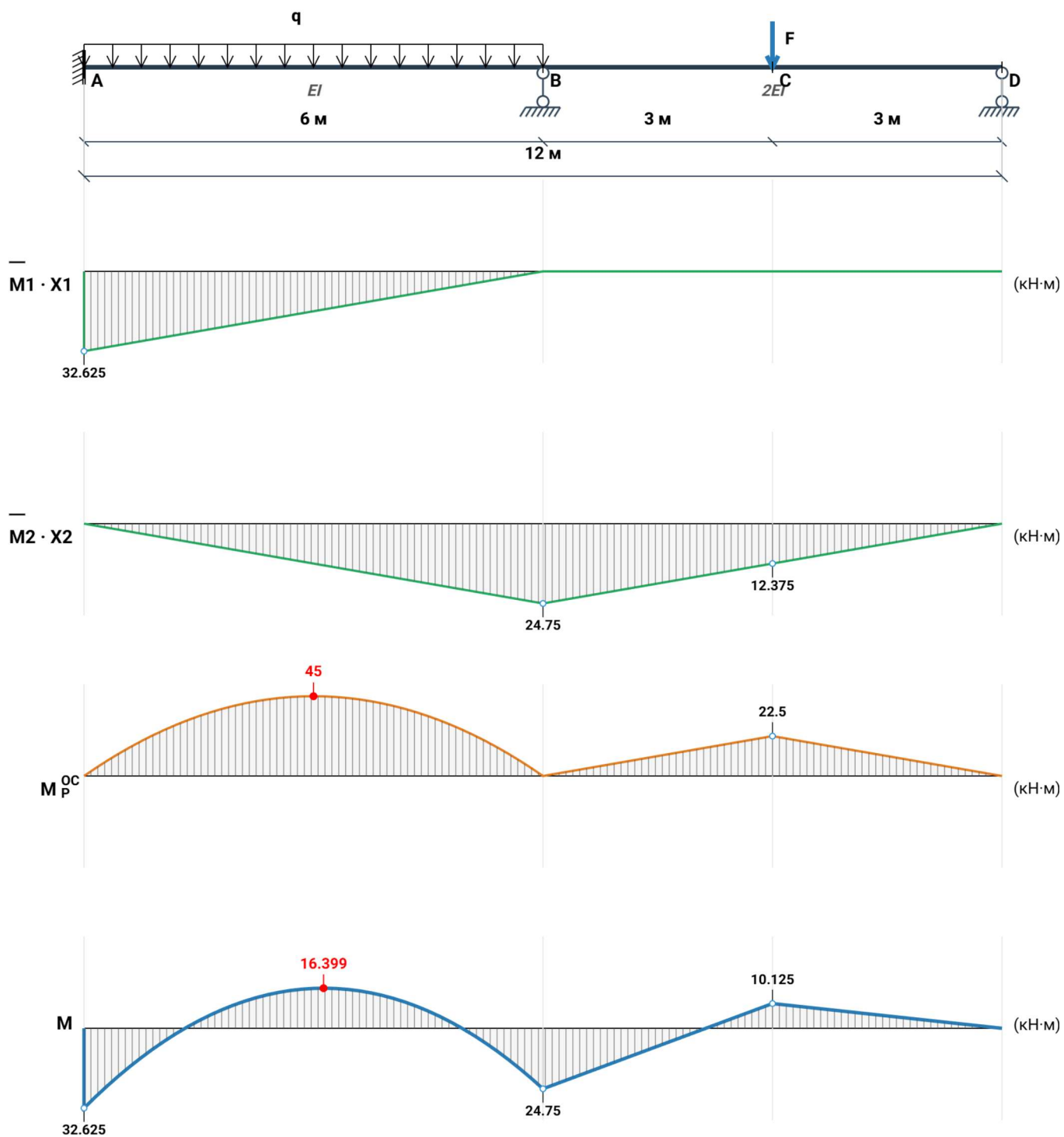
$$\begin{cases} 2X_1 + 1X_2 + 90 = 0 \\ 1X_1 + 3X_2 + 106.875 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = -32.625 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ X_2 = -24.75 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{cases}$$

6. Построение окончательных эпюр

Окончательная эпюра строится по формуле:

$$M_{ок} = M_p^{OC} + \sum X_i \cdot \overline{M}_i$$



7. Деформационный контроль

Проверка выполняется путем перемножения окончательной эпюры моментов $M_{ок}$ на суммарную единичную эпюру $\overline{M}_{\Sigma}$.

$$\Delta = M_{ок} \cdot \overline{M}_{\Sigma} = \sum \int \frac{M_{ок} \cdot \overline{M}_{\Sigma}}{EI} dz$$

$$\Delta = \frac{6}{6EI}((-32.625) \cdot 1 + 4 \cdot 16.312 \cdot 1 + (-24.75) \cdot 1) + \frac{3}{6 \cdot 2EI}((-24.75) \cdot 1 + 4 \cdot (-7.313) \cdot 0.75 + 10.125 \cdot 0.5) + \frac{3}{6 \cdot 2EI}(10.125 \cdot 0.5 + 4 \cdot 5.062 \cdot 0.25 + 0 \cdot 0)$$

$$\Delta = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$$

Проверка пройдена! (Результат точный)

8. Расчет поперечных сил Q

Поперечная сила на участке вычисляется по формуле через моменты на концах участка:

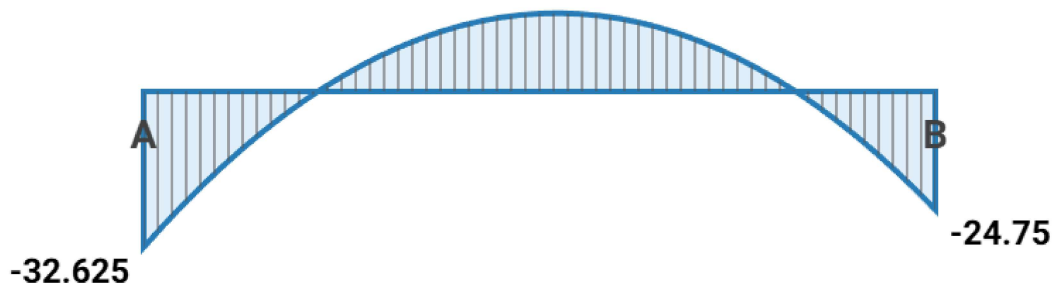
$$Q_{ij} = \frac{M_{прав} - M_{лев}}{l_{ij}} \pm \frac{ql_{ij}}{2}$$

Участок А - В (6.00 м)

Моменты: $M_A = -32.625 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_B = -24.75 \text{ кН} \cdot \text{м}$

$$Q_A = \frac{-24.75 - (-32.625)}{6} + \frac{10 \cdot 6}{2} = 31.313 \text{ кН}$$

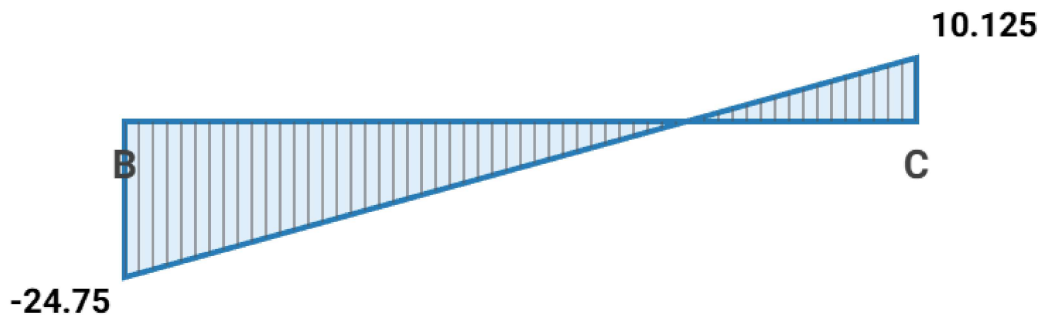
$$Q_B = \frac{-24.75 - (-32.625)}{6} - \frac{10 \cdot 6}{2} = -28.687 \text{ кН}$$



Участок В - С (3.00 м)

Моменты: $M_B = -24.75 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_C = 10.125 \text{ кН} \cdot \text{м}$

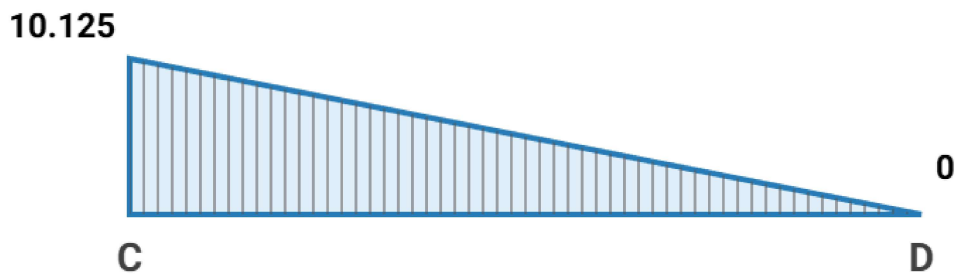
$$Q_{B-C} = \frac{10.125 - (-24.75)}{3} = \mathbf{11.625 \text{ кН}}$$



Участок С - D (3.00 м)

Моменты: $M_C = 10.125 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_D = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$

$$Q_{C-D} = \frac{0 - (10.125)}{3} = -\mathbf{3.375 \text{ кН}}$$



9. Нахождение реакций опор

Реакции опор определяются как скачок на эпюре поперечных сил: $R = Q_{\text{прав}} - Q_{\text{лев}}$.

$$R_A = Q_{\text{пр}} - Q_{\text{лев}} = 31.313 = \mathbf{31.313 \text{ кН}}$$

$$M_A = M_{\text{изг}}(0) = -\mathbf{32.625 \text{ кН} \cdot \text{м}}$$

$$R_B = Q_{np} - Q_{\text{лев}} = 11.625 + 28.687 = \mathbf{40.313 \text{ кН}}$$

$$R_D = Q_{np} - Q_{\text{лев}} = +3.375 = \mathbf{3.375 \text{ кН}}$$