

Отчет по расчету пространственного бруса

Расчетные схемы пространственного бруса.

При построении эпюр будем руководствоваться следующими правилами:

- нормальная сила N_z считается положительной, если она вызывает растяжение бруса;
- крутящий момент M_z считается положительным, если при взгляде на сечение со стороны внешней нормали он виден вращающим брус против часовой стрелки;
- поперечная сила Q_x считается положительной, если при взгляде со стороны положительного направления оси y она стремится вращать оставшуюся часть бруса по ходу часовой стрелки относительно ближайшей точки на оси бруса (для поперечной силы Q_y — то же, по отношению к оси x);

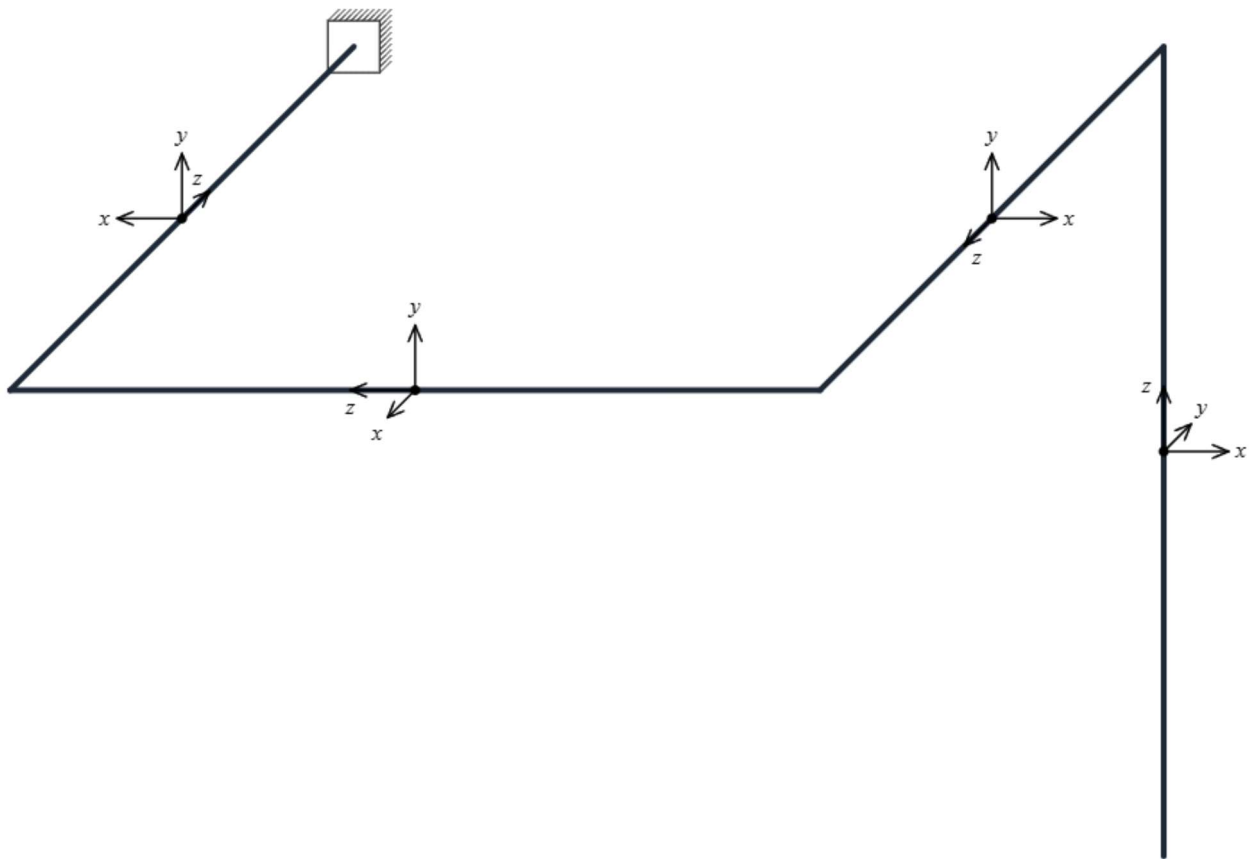


Рис. 1. Местные «скользящие» системы координат участков (оси x , y , z)

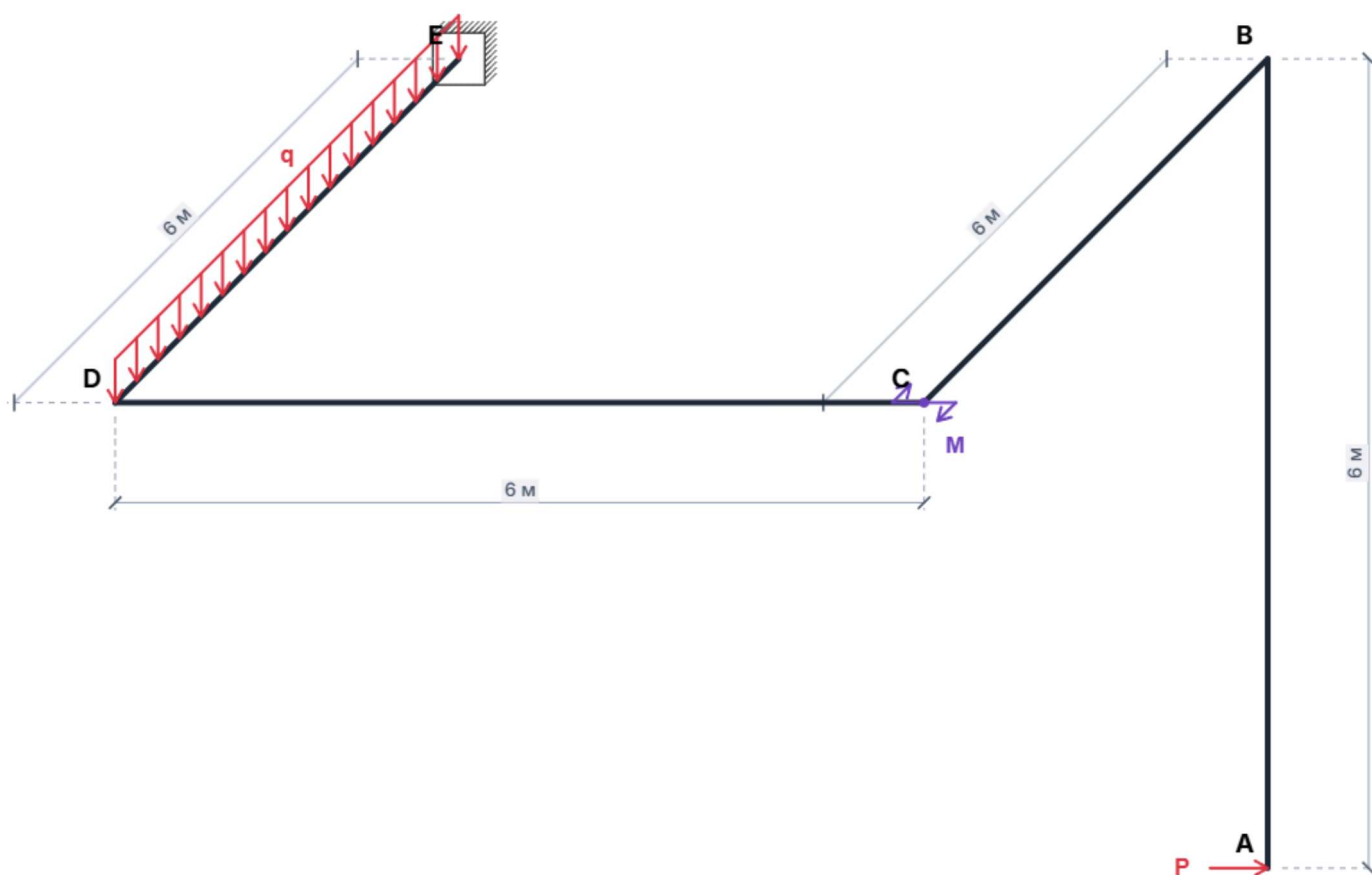


Рис. 2. Геометрические размеры участков и приложенные внешние нагрузки

Дано:

Сосредоточенные силы:
 $P = 20 \text{ кН}$

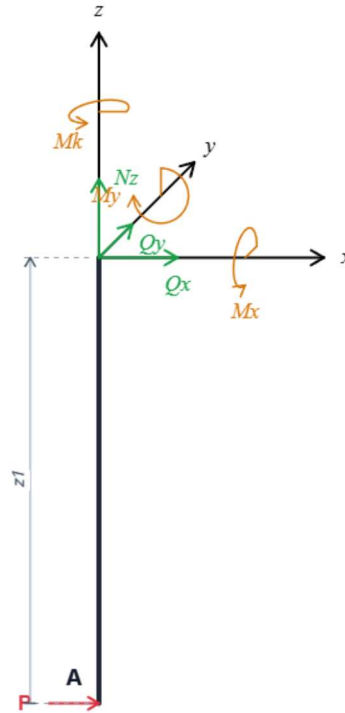
Сосредоточенные моменты:
 $M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$

Распределенные нагрузки:
 $q = 10 \text{ кН/м}$

Уравнения статики и внутренние усилия по участкам

Участок АВ $0 \text{ м} \leq z_1 \leq 6 \text{ м}$

На рис. показана отсечённая часть бруса на участке АВ.



$$\sum F_x = Q_x + P = 0 \Rightarrow$$

$$Q_x = -P \Rightarrow$$

$$Q_x = -20 = -20 \text{ кН} \quad \text{--- (const)}$$

$$\sum F_y = Q_y = 0 \text{ кН}$$

$$\sum F_z = N_z = 0 \text{ кН}$$

$$\sum m_x = M_x = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\sum m_y = M_y + P \cdot z_1 = 0 \Rightarrow$$

$$M_y = -P \cdot z_1 \Rightarrow$$

$$M_y = -20 \cdot z_1 \quad \text{--- уравнение прямой линии}$$

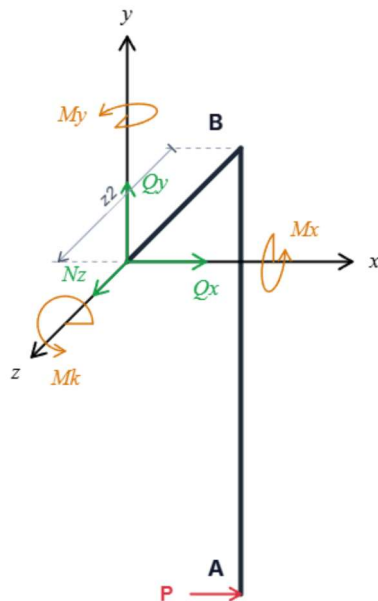
$$\text{при } z_1 = 0 \text{ м, } M_y = 0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } z_1 = 6 \text{ м, } M_y = -20 \cdot 6 = -120 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\sum m_z = M_z = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Участок ВС $0 \text{ м} \leq z_2 \leq 6 \text{ м}$

На рис. показана отсечённая часть бруса на участке ВС.



$$\sum F_x = Q_x + P = 0 \Rightarrow$$

$$Q_x = -P \Rightarrow$$

$$Q_x = -20 = -20 \text{ кН} \quad \text{--- (const)}$$

$$\sum F_y = Q_y = 0 \text{ кН}$$

$$\sum F_z = N_z = 0 \text{ кН}$$

$$\sum m_x = M_x = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\sum m_y = M_y + P \cdot z_2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$M_y = -P \cdot z_2 \quad \Rightarrow$$

$$M_y = -20 \cdot z_2 \quad \text{--- уравнение прямой линии}$$

$$\text{при } z_2 = 0 \text{ м, } M_y = 0 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } z_2 = 6 \text{ м, } M_y = -20 \cdot 6 = -120 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

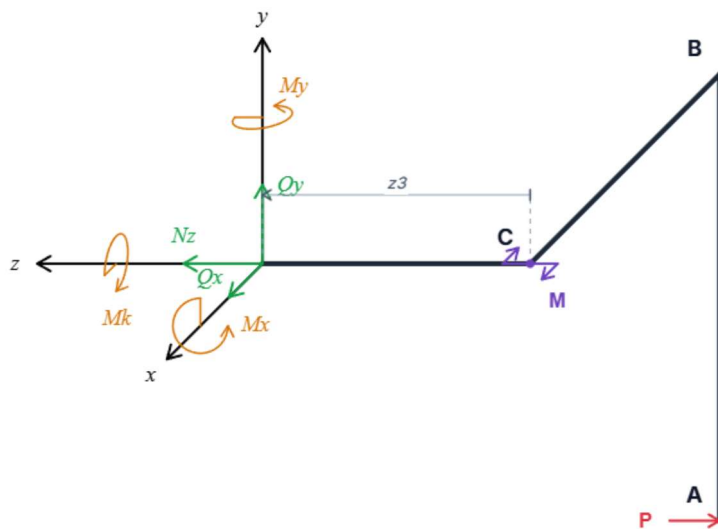
$$\sum m_z = M_z + P \cdot 6 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$M_z = -P \cdot 6 \quad \Rightarrow$$

$$M_z = -20 \cdot 6 = -120 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad \text{--- (const)}$$

Участок CD $0 \text{ м} \leq z_3 \leq 6 \text{ м}$

На рис. показана отсечённая часть бруса на участке CD.



$$\sum F_x = Q_x = 0 \text{ кН}$$

$$\sum F_y = Q_y = 0 \text{ кН}$$

$$\sum F_z = N_z - P = 0 \Rightarrow$$

$$N_z = P \Rightarrow$$

$$N_z = 20 = 20 \text{ кН} \quad \text{--- (const)}$$

$$\sum m_x = M_x - P \cdot 6 = 0 \Rightarrow$$

$$M_x = P \cdot 6 \Rightarrow$$

$$M_x = 20 \cdot 6 = 120 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad \text{--- (const)}$$

$$\sum m_y = M_y + P \cdot 6 + M = 0 \Rightarrow$$

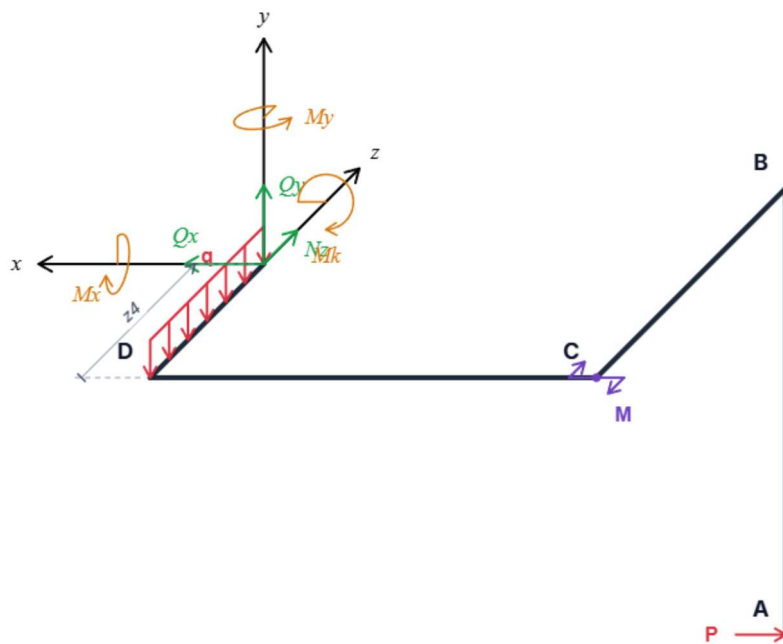
$$M_y = -P \cdot 6 - M \Rightarrow$$

$$M_y = -20 \cdot 6 - 20 = -140 \text{ кН}\cdot\text{м} \quad \text{--- (const)}$$

$$\sum m_z = M_z = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Участок DE $0 \text{ м} \leq z_4 \leq 6 \text{ м}$

На рис. показана отсечённая часть бруса на участке DE.



$$\sum F_x = Q_x - P = 0 \Rightarrow$$

$$Q_x = P \Rightarrow$$

$$Q_x = 20 = 20 \text{ кН} \quad \text{--- (const)}$$

$$\sum F_y = Q_y - q \cdot z_4 = 0 \Rightarrow$$

$$Q_y = q \cdot z_4 \Rightarrow$$

$$Q_y = 10 \cdot z_4 \quad \text{--- уравнение прямой линии}$$

при $z_4 = 0$ м, $Q_y = 0$ кН;

при $z_4 = 6$ м, $Q_y = +10 \cdot 6 = 60$ кН.

$$\sum F_z = N_z = 0 \text{ кН}$$

$$\sum m_x = M_x + \frac{q \cdot z_4^2}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$M_x = -\frac{q \cdot z_4^2}{2} \Rightarrow$$

$$M_x = -\frac{10 \cdot z_4^2}{2} \text{ --- уравнение параболы}$$

при $z_4 = 0$ м, $M_x = 0$ кН·м;

при $z_4 = 6$ м, $M_x = -5 \cdot 6^2 = -180$ кН·м.

$$\sum m_y = M_y + P \cdot 6 - P \cdot z_4 + M = 0 \Rightarrow$$

$$M_y = -P \cdot 6 + P \cdot z_4 - M \Rightarrow$$

$$M_y = -20 \cdot 6 + 20 \cdot z_4 - 20 \text{ --- уравнение прямой линии}$$

при $z_4 = 0$ м, $M_y = -140$ кН·м;

при $z_4 = 6$ м, $M_y = -140 + 20 \cdot 6 = -20$ кН·м.

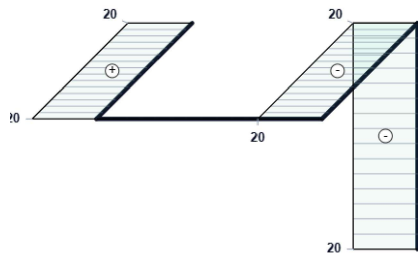
$$\sum m_z = M_z - P \cdot 6 = 0 \Rightarrow$$

$$M_z = P \cdot 6 \Rightarrow$$

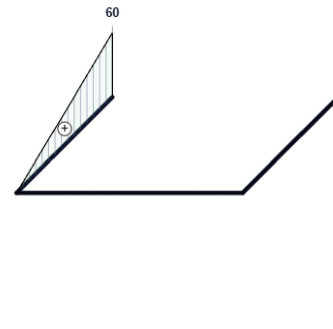
$$M_z = 20 \cdot 6 = 120 \text{ кН·м --- (const)}$$

Итоговые эпюры внутренних усилий

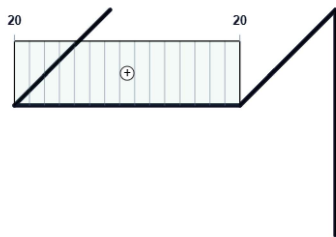
Поперечные силы Q_x (кН)



Поперечные силы Q_y (кН)

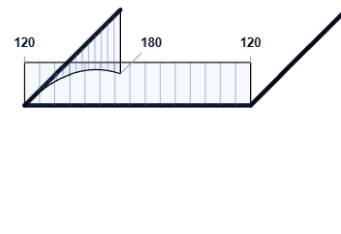


Продольные силы N (кН)



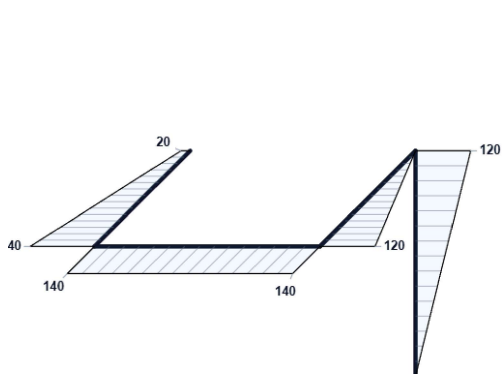
Изгибающие моменты M_x (кН·м)

(построена на сжатом волокне)

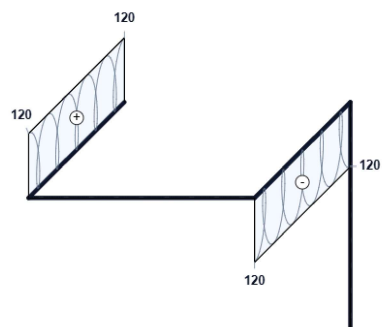


Изгибающие моменты M_y (кН·м)

(построена на сжатом волокне)

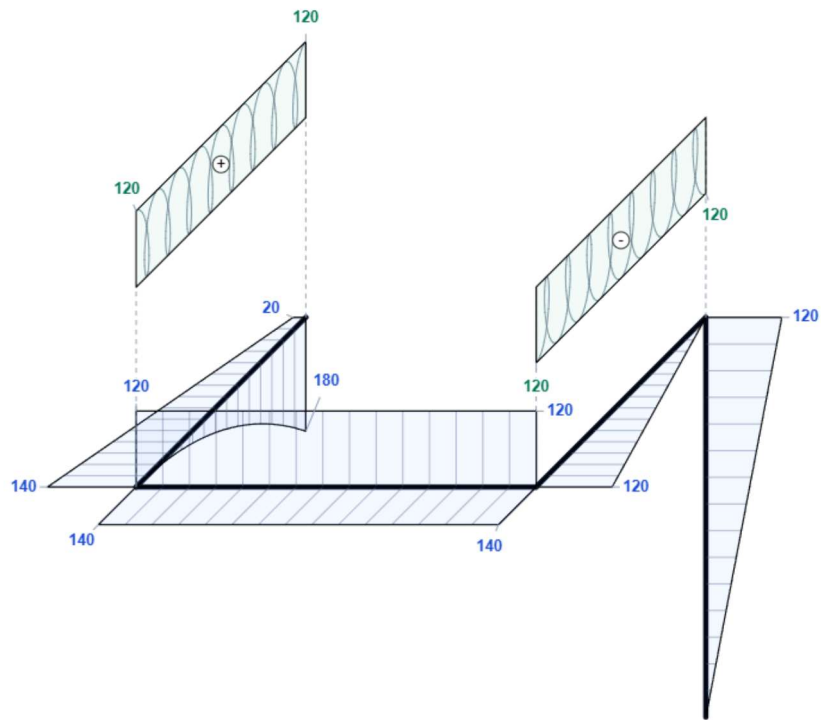


Крутящие моменты M_z (Мк) (кН·м)



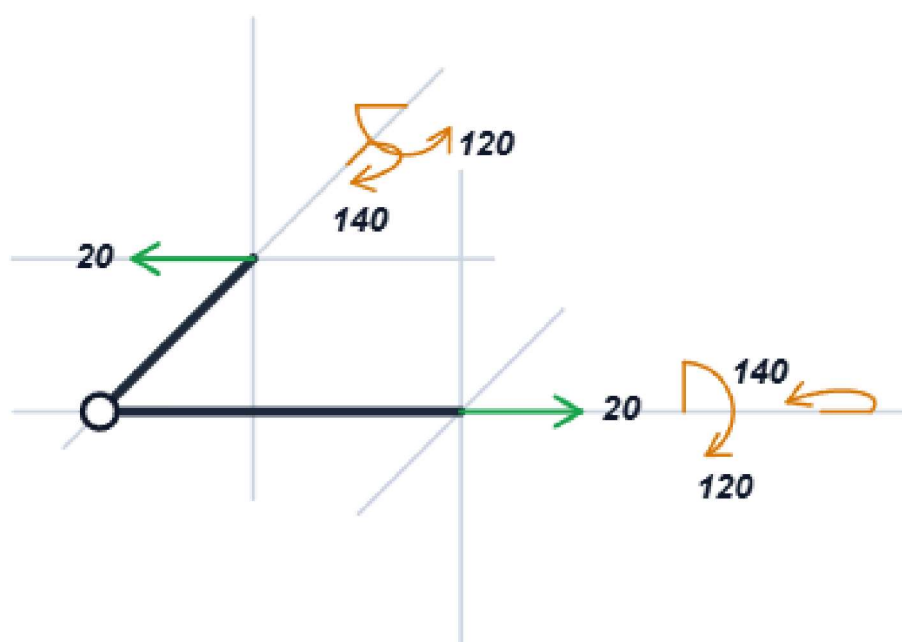
Суммарная эпюра моментов (M_x , M_y , M_z)

Эпюры изгибающих моментов совмещены с вынесенной эпюрой крутящих моментов

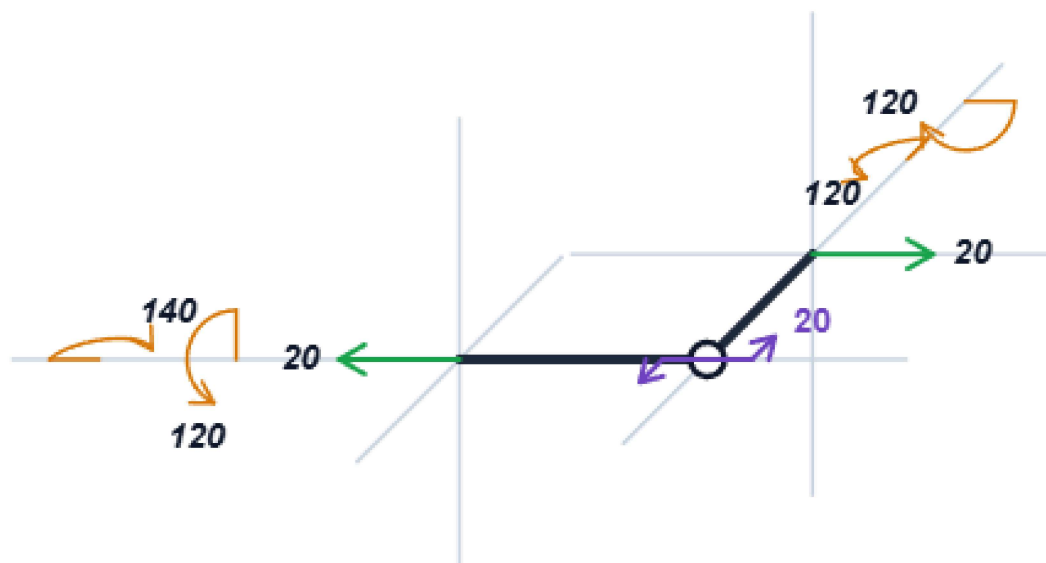


проверка узлов

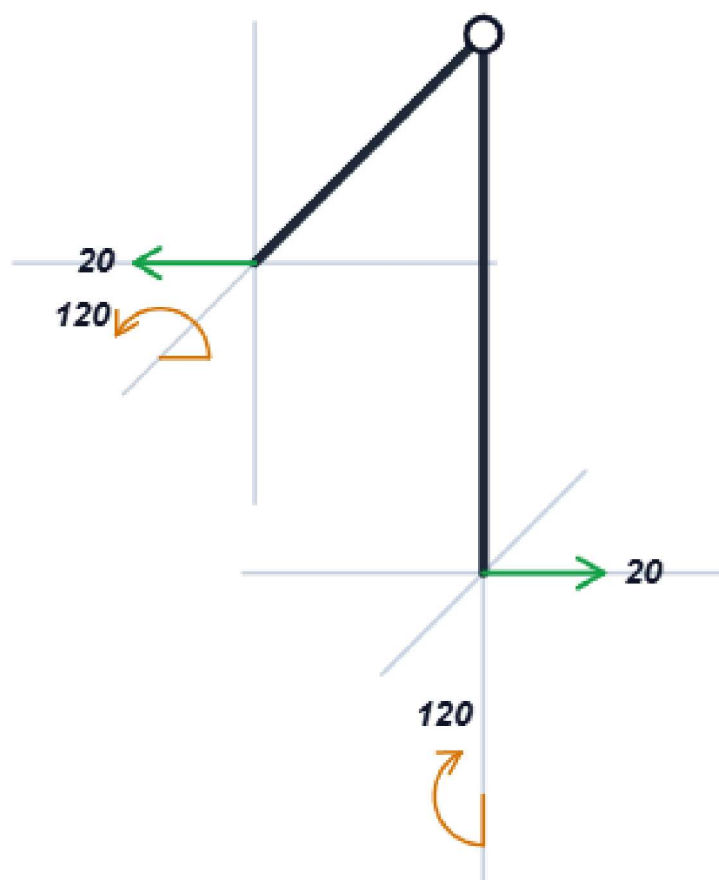
Узел D



Узел С



Узел В



Геометрический расчет и подбор сечений

Виды сопротивления по участкам:

Участок АВ: **Прямой изгиб**

Обоснование: изгибающий момент действует только относительно одной главной оси (M_y).

Участок ВС: **Прямой изгиб с кручением**

Обоснование: совместное действие изгибающего момента относительно одной оси (M_y) и крутящего момента M_z .

Участок CD: **Косой изгиб**

Обоснование: изгибающие моменты действуют относительно обеих главных осей (M_x и M_y).

Участок DE: **Косой изгиб с кручением**

Обоснование: совместное действие изгибающих моментов относительно двух осей (M_x, M_y) и крутящего момента M_z .

1. Определение расчетных нагрузок и перевод единиц:

Перевод из системы (кН, м) в СИ (Н, мм): $1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}$, $1 \text{ кН} \cdot \text{м} = 10^6 \text{ Н} \cdot \text{мм}$.

Допускаемое напряжение: $[\sigma] = 150 \text{ МПа} = 150 \text{ Н/мм}^2$.

2. Нахождение опасного сечения:

Эквивалентный изгибающий момент по III теории прочности:

$$M_{\text{экв}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0.75M_z^2}$$

Для участка АВ:

$$\text{Сечение } A : N_z = 0 \text{ кН}, \quad M_{\text{экв}} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0.75 \cdot 0^2} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\text{Сечение } B : N_z = 0 \text{ кН}, \quad M_{\text{экв}} = \sqrt{0^2 + 120^2 + 0.75 \cdot 0^2} = 120 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Для участка ВС:

$$\text{Сечение } B : N_z = 0 \text{ кН}, \quad M_{\text{экв}} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0.75 \cdot 120^2} = 103.923 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\text{Сечение } C : N_z = 0 \text{ кН}, \quad M_{\text{экв}} = \sqrt{0^2 + 120^2 + 0.75 \cdot 120^2} = 158.745 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Для участка CD:

$$\text{Сечение } C : N_z = 20 \text{ кН}, \quad M_{\text{экв}} = \sqrt{120^2 + 140^2 + 0.75 \cdot 0^2} = 184.391 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\text{Сечение } D : N_z = 20 \text{ кН}, \quad M_{\text{экв}} = \sqrt{120^2 + 140^2 + 0.75 \cdot 0^2} = 184.391 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Для участка DE:

$$\text{Сечение } D : N_z = 0 \text{ кН}, \quad M_{\text{экв}} = \sqrt{0^2 + 140^2 + 0.75 \cdot 120^2} = 174.356 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\text{Сечение } E : N_z = 0 \text{ кН}, \quad M_{\text{экв}} = \sqrt{180^2 + 20^2 + 0.75 \cdot 120^2} = 208.806 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Опасное сечение: **Участок DE (сечение E)** с максимальными внутренними усилиями:

$$M_{\text{экв}} = 208.806 \text{ кН}\cdot\text{м} = 2.0881 \cdot 10^8 \text{ Н}\cdot\text{мм}$$

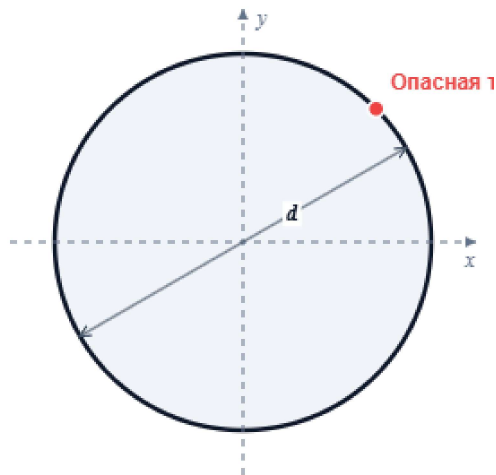
Компоненты внутренних моментов в этом сечении по модулю:

$$|M_x| = 180 \text{ кН}\cdot\text{м} = 1.8 \cdot 10^8 \text{ Н}\cdot\text{мм}$$

$$|M_y| = 20 \text{ кН}\cdot\text{м} = 2 \cdot 10^7 \text{ Н}\cdot\text{мм}$$

$$|M_z| = 120 \text{ кН}\cdot\text{м} = 1.2 \cdot 10^8 \text{ Н}\cdot\text{мм}$$

Сплошной круглый профиль



Подбор диаметра осуществляется по эквивалентному моменту (по III теории прочности):

$$M_{\text{экв}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0.75M_z^2} = 2.0881 \cdot 10^8 \text{ Н} \cdot \text{мм}$$

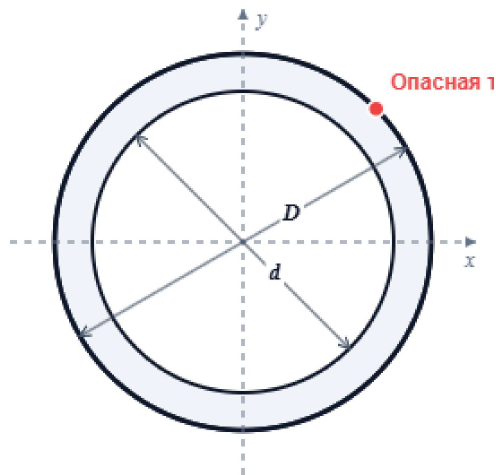
Требуемый момент сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{M_{\text{экв}}}{[\sigma]} = \frac{2.0881 \cdot 10^8}{150} = 1.392 \cdot 10^6 \text{ мм}^3$$

Из геометрической формулы $W_x = \frac{\pi d^3}{32}$ находим диаметр:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1.392 \cdot 10^6}{\pi}} = 242.04 \text{ мм} = 24.2 \text{ см}$$

Трубчатое (кольцевое) сечение (соотношение $k = d/D = 0.8$)



Подбор наружного диаметра осуществляется по эквивалентному моменту (по III теории прочности):

$$M_{\text{экв}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0.75M_z^2} = 2.0881 \cdot 10^8 \text{ Н} \cdot \text{мм}$$

Требуемый момент сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{M_{\text{экв}}}{[\sigma]} = \frac{2.0881 \cdot 10^8}{150} = 1.392 \cdot 10^6 \text{ мм}^3$$

Из геометрического выражения моментов сопротивления для кольца:

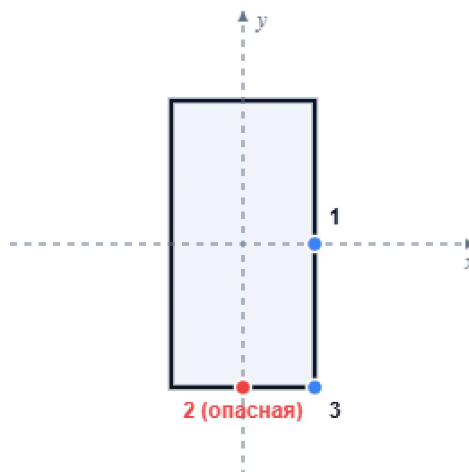
$$W_x = \frac{\pi D^3}{32} \cdot (1 - k^4) \Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{32W_x}{\pi(1 - k^4)}}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1.392 \cdot 10^6}{\pi \cdot (1 - 0.5904)}} = 28.85 \text{ см}$$

Внутренний диаметр трубы:

$$d = k \cdot D = 0.8 \cdot 288.52 = 230.81 \text{ мм} = 23.08 \text{ см}$$

Прямоугольное сплошное сечение (соотношение $k = h/b = 2$)



Известные расчетные усилия:

$$M_x = 1.8 \cdot 10^8 \text{ Н} \cdot \text{мм}$$

$$M_y = 2 \cdot 10^7 \text{ Н} \cdot \text{мм}$$

$$M_z = 1.2 \cdot 10^8 \text{ Н} \cdot \text{мм}$$

Для заданного соотношения $k = 2$ геометрические коэффициенты кручения:
 $\alpha = 0.246, \gamma = 0.795$. Напряжения выражаются через ширину основания b :

Действует косой изгиб с кручением. Проверяем характерные точки:

Точка 1 (середина длинной стороны):

$$\sigma_1 = \frac{6M_y}{k \cdot b^3} = \frac{6 \cdot 10^7}{b^3} \quad \tau_1 = \frac{M_z}{\alpha \cdot k \cdot b^3} = \frac{2.439 \cdot 10^8}{b^3}$$

$$\sigma_{\text{экв1}} = \sqrt{\sigma_1^2 + 3\tau_1^2} = \frac{4.2669 \cdot 10^8}{b^3}$$

Точка 2 (середина короткой стороны):

$$\sigma_2 = \frac{6M_x}{k^2 \cdot b^3} = \frac{2.7 \cdot 10^8}{b^3} \quad \tau_2 = \gamma \cdot \tau_1 = \frac{1.939 \cdot 10^8}{b^3}$$

$$\sigma_{\text{эKB2}} = \sqrt{\sigma_2^2 + 3\tau_2^2} = \frac{4.3092 \cdot 10^8}{b^3}$$

Точка 3 (угловая точка): Касательные напряжения отсутствуют ($\tau_3 = 0$):

$$\sigma_{\text{эKB3}} = \sigma_3 = \frac{6M_x}{k^2 \cdot b^3} + \frac{6M_y}{k \cdot b^3} = \frac{3.3 \cdot 10^8}{b^3}$$

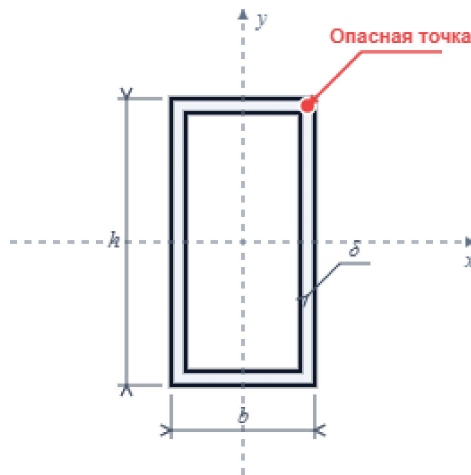
Опасная точка сечения: **Точка 2.** Из условия прочности $\sigma_{\text{эKB, max}} \leq [\sigma]$:

$$b = \sqrt[3]{\frac{4.3092 \cdot 10^8}{150}} = 14.22 \text{ см}$$

Высота прямоугольника:

$$h = k \cdot b = 2 \cdot 14.22 = 28.43 \text{ см}$$

Тонкостенное коробчатое сечение ($h/b = 2$, $\delta/b = 0.1$)



Коэффициент соотношения сторон профиля $k = h/b = 2$, относительная толщина стенок $\delta/b = 0.1$.

Геометрические характеристики выражаются через b^3 :

$$W_x = b^3 \cdot \frac{\delta}{b} \cdot \left[\frac{k^2}{3} + k \right] = 0.3333 \cdot b^3$$

$$W_y = b^3 \cdot \frac{\delta}{b} \cdot \left[k + \frac{1}{3} \right] = 0.2333 \cdot b^3$$

$$W_t = 2 \cdot k \cdot \frac{\delta}{b} \cdot b^3 = 0.4 \cdot b^3$$

Эквивалентное напряжение в угловой точке на основе совместного изгиба с кручением:

$$\sigma = \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} = \frac{1.8 \cdot 10^8}{0.3333 \cdot b^3} + \frac{2 \cdot 10^7}{0.2333 \cdot b^3} = \frac{6.2571 \cdot 10^8}{b^3}$$

$$\tau = \frac{|M_z|}{W_t} = \frac{1.2 \cdot 10^8}{0.4 \cdot b^3} = \frac{3 \cdot 10^8}{b^3}$$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{6.2571 \cdot 10^8}{b^3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{3 \cdot 10^8}{b^3}\right)^2} = \frac{8.1334 \cdot 10^8}{b^3} \leq [\sigma]$$

Определяем минимально допустимую ширину:

$$b = \sqrt[3]{\frac{8.1334 \cdot 10^8}{150}} = 17.57 \text{ см}$$

Остальные размеры сечения:

$$h = k \cdot b = 2 \cdot 175.68 = 351.36 \text{ мм} = 35.14 \text{ см}$$

$$\delta = \left(\frac{\delta}{b}\right) \cdot b = 0.1 \cdot 175.68 = 17.57 \text{ мм} = 1.76 \text{ см}$$